KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE entuzjaści edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Bartosz Kondratek

Marzena Grochowalska

Agnieszka Sułowska

Kompetencje matematyczne piątoklasistów

Warszawa, listopad 2015

Autorzy:
Bartosz Kondratek
Marzena Grochowalska
Agnieszka Sułowska

Zespół realizujący badanie:
Monika Czajkowska, Marzenna Grochowalska, Jerzy Janowicz, Marcin Karpiński, Jacek Lech, Margaryta Orzechowska, Agnieszka Sułowska, Małgorzata Zambrowska

Recenzenci zewnętrzni:
Henryk Dąbrowski

Wzór cytowania:
Kondratek, B., Grochowalska, M., Sułowska, A. (2015). *Kompetencje matematyczne piątoklasistów*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

Wydawca:
Instytut Badań Edukacyjnych
ul. Górczewska 8
01-180 Warszawa
tel. (22) 241 71 00; www.ibe.edu.pl

Publikacja opracowana w ramach projektu systemowego*: Badanie jakości i efektywności edukacji oraz instytucjonalizacja zaplecza badawczego,* współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, realizowanego przez Instytut Badań Edukacyjnych.

Publikacja została wydrukowana na papierze ekologicznym.

Egzemplarz bezpłatny

Spis treści

1. Badanie *Kompetencje piątoklasistów 2015* – część matematyczna – wprowadzenie

1.1. Założenia badania

W badaniu kompetencji piątoklasistów (K5) wzięli udział uczniowie klas V szkół podstawowych. Swoją formą i rodzajem użytych zadań badanie nawiązywało do sprawdzianu po szkole podstawowej, który od roku 2015 jest oparty na wymaganiach nowej podstawy programowej kształcenia ogólnego.

Od 2009 roku w polskim systemie oświaty wdrażana jest nowa podstawa programowa. W kwietniu 2015 roku sprawdzian po szóstej klasie po raz pierwszy badał kompetencje dzieci, które od początku swojej edukacji uczyły się według nowej podstawy programowej. Sprawdzian ten ma nową formułę – jest podzielony na oddzielne części polonistyczną i matematyczną. Oprócz umiejętności szczegółowych z każdego z tych przedmiotów sprawdzane są także umiejętności opisane w wymaganiach ogólnych podstawy programowej. Dla matematyki są to: sprawność rachunkowa, umiejętność wykorzystania i tworzenia informacji, modelowania matematycznego, tworzenia strategii rozwiązania oraz prowadzenia prostego rozumowania i wnioskowania.

W części matematycznej badania znalazły się zadania sprawdzające wszystkie wymienione powyżej wymagania ogólne, poza umiejętnością wykorzystania i tworzenia informacji. Z kilku wcześniejszych badań prowadzonych przez Instytut Badań Edukacyjnych wynika, że ta umiejętność jest zdecydowania najlepiej opanowana przez uczniów szkoły podstawowej i wobec tego warto raczej skupić się na diagnozowaniu problemów, jakie mają uczniowie w zakresie pozostałych wymagań ogólnych.

Badanie K5 było bezpłatne, a udział w nim był dobrowolny. Po zakończeniu badania i ocenieniu przez nauczycieli rozwiązań uczniowskich zgodnie z dostarczonym szkołom schematem oceniania i wprowadzeniu danych o rozwiązaniach do programu komputerowego, szkoła otrzymała informacje o wynikach uczniów poszczególnych oddziałów, a także o wynikach uczniów całej szkoły na tle całej populacji uczniów biorących udział w badaniu, na tle danego województwa oraz na tle innych miejscowości (wieś, miasto do 10 tys. mieszkańców, miasto powyżej 10 tys. mieszkańców, miasto powyżej 100 tys. mieszkańców). Wraz z wynikami nauczyciele otrzymywali także rekomendacje wskazujące możliwe sposoby dalszej pracy z uczniami, mające na celu poprawę umiejętności, które nie zostały jeszcze opanowane w wystarczającym stopniu i wyeliminowanie pojawiających się błędów.

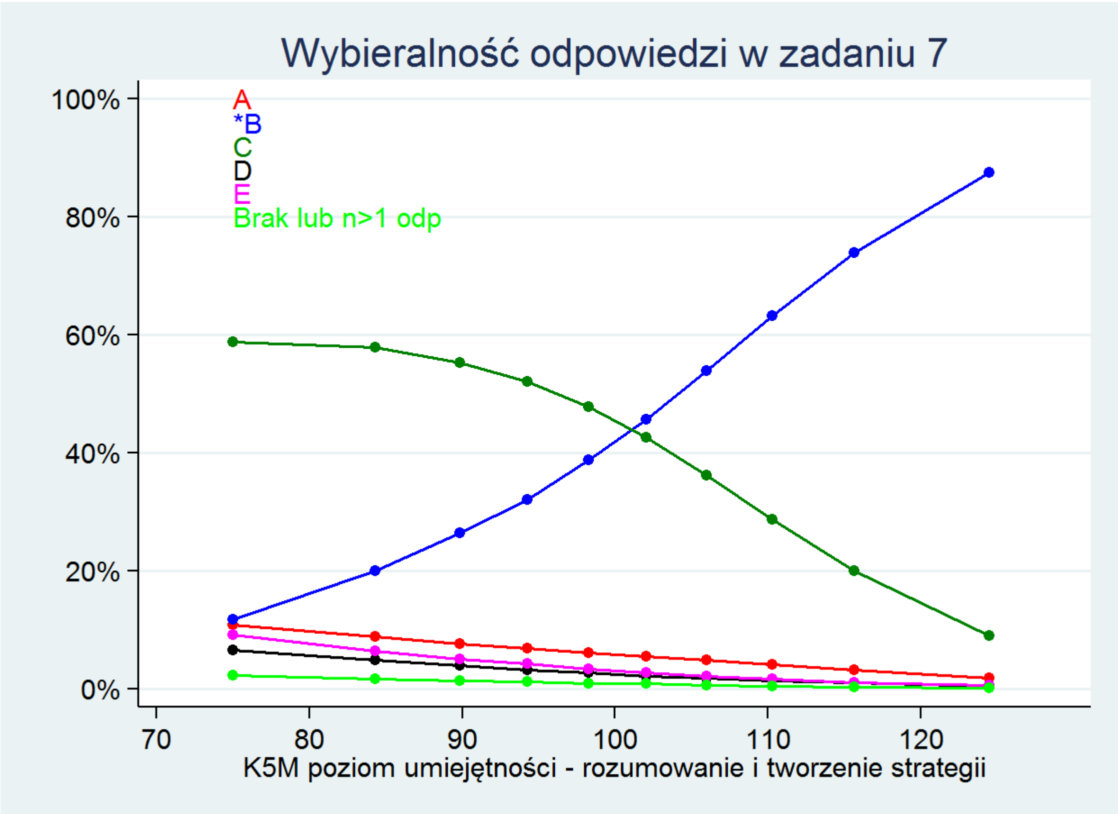
1.2. Informacje o badaniu

W badaniu K5 wzięło udział 5769 szkół podstawowych z terenu całej Polski. W szkołach tych zestawy zadań z języka polskiego i matematyki rozwiązywało łącznie 153 683 uczniów. Ponieważ, zgodnie z założeniami, udział szkół w badaniu był dobrowolny, nie była to próba ani losowa ani celowa, ale jej liczebność jest tak duża, że pozwala uznać wyniki uzyskane w badaniu za miarodajne dla całej populacji.

W omówieniach zadań posługujemy się wykresami procentowymi, na których przedstawiono, jak często poszczególne odpowiedzi wybierali uczniowie o różnym poziomie umiejętności matematycznych.

Umiejętności uczniów zostały określone w znormalizowanej skali 100, 15, gdzie 100 oznacza średni poziom umiejętności, a 15 – wielkość odchylenia standardowego.

Oto przykład takiego wykresu dla jednego z zadań z matematyki:



Na osi poziomej umieszczone są grupy (decyle) uczniów o rosnącym poziomie umiejętności matematycznych w zakresie sprawdzanego przez dane zadanie wymagania ogólnego, w tym przypadku: rozumowanie i tworzenie strategii. Liczba 100 oznacza uczniów o średnim poziomie umiejętności, im bardziej na lewo, tym uczniowie słabsi, im bardziej na prawo – tym lepsi.

Na osi pionowej zaznaczono odsetek uczniów z danego decyla wybierających każdą z proponowanych w zadaniu odpowiedzi. Każda z odpowiedzi zaznaczona jest innym kolorem, odpowiedź poprawna oznaczona jest gwiazdką.

Z przedstawionego powyżej wykresu już na pierwszy rzut oka widać, że zdecydowana większość uczniów wybierała poprawną odpowiedź B (niebieska linia) lub niepoprawną C (ciemnozielona linia). Pozostałe niepoprawne odpowiedzi były wskazywane bardzo rzadko.

Spośród uczniów z pierwszego decyla (skrajne kropki z lewej strony wykresu – po jednej na każdej linii), czyli spośród uczniów o najniższych umiejętnościach, większość – około 60% – wybrało niepoprawną odpowiedź C, około 15% uczniów wybrało poprawną odpowiedź B. Reszta uczniów z tej grupy wybrała pozostałe niepoprawne odpowiedzi – każda nich ma odsetek wyborów między 5% a 15%. Zdecydowanie najmniej uczniów z tej grupy nie wybrało żadnej odpowiedzi lub wybrało więcej niż jedną odpowiedź (jasnozielona kropka).

W kolejnej grupie (decylu) odsetek uczniów wybierających niepoprawną odpowiedź C nieznacznie zmalał, również odsetki uczniów wybierających pozostałe błędne odpowiedzi nieznacznie się zmniejszyły. Z kolei wyraźnie zwiększył się, do 20%, odsetek uczniów wybierających poprawną odpowiedź B.

W kolejnych decylach wyraźnie spada odsetek wyborów niepoprawnej odpowiedzi C, a rośnie częstość wybierania poprawnej odpowiedzi B.

I w końcu, jeśli spojrzymy na prawą stronę wykresu, zobaczymy, że w najwyższym decylu, czyli wśród uczniów najlepszych, już prawie 90% wybrało poprawną odpowiedź B, ale nadal około 10% wskazało niepoprawną odpowiedź C. Pozostałe odpowiedzi są wybierane przez bardzo niewielu uczniów.

2. Część ogólna raportu

2.1. Informacje ogólne z części matematycznej badania

W rozwiązywanym przez uczniów zestawie zadań z matematyki znajdowało się:

- 9 zadań zamkniętych
  - 8 zadań punktowanych w skali 0-1
  - 1 zadanie punktowane w skali 0-2
- 4 zadania otwarte
  - 1 zadanie punktowane w skali 0-1
  - 2 zadania punktowane w skali 0-2
  - 1 zadanie punktowane w skali 0-3

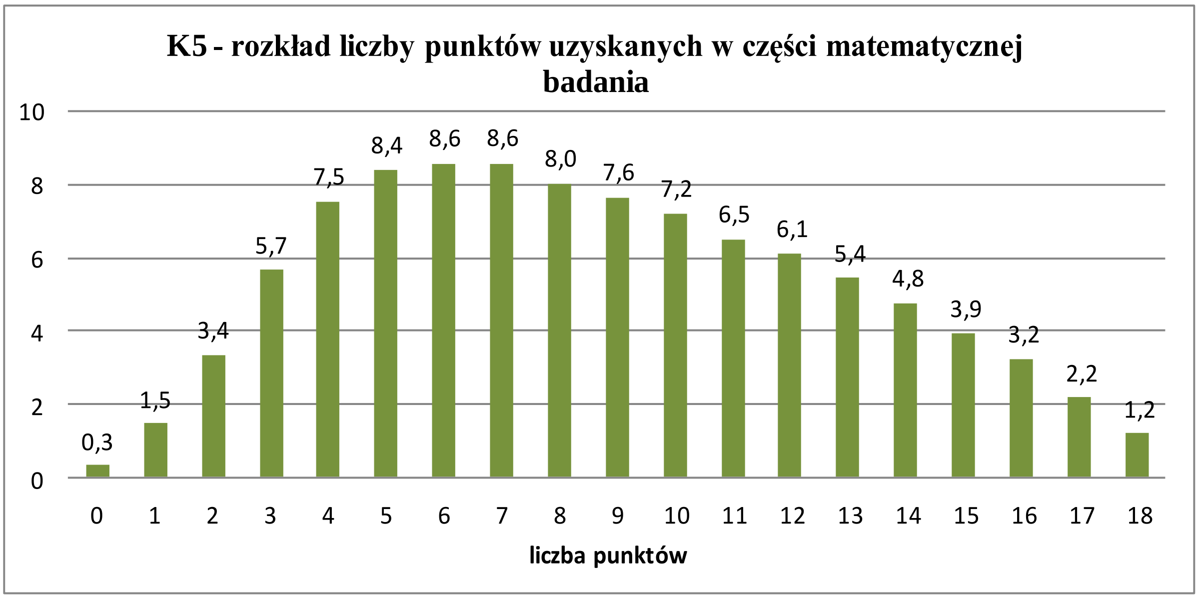
Za rozwiązanie wszystkich zadań można było uzyskać łącznie 18 punktów.

Za rozwiązanie całego zestawu zadań z matematyki uczniowie klasy piątej otrzymali średnio 48% możliwych do zdobycia punktów – średni wynik ucznia wyniósł 8,65 punktu na 18 możliwych.

Parametry statystyczne zestawu zadań z matematyki:

maks. liczba punktów	18
liczba zadań	13
liczba uczniów	153 683
alfa Cronbacha	0,73
średnia liczba punktów	8,65
odchylenie standardowe	4,18
mediana	8
minimum	0
maksimum	18

Na wykresie poniżej przedstawiono rozkład uzyskanych punktów.



Najwięcej uczniów uzyskało 7 punktów na 18 możliwych (8,57%), podobny odsetek uczniów zdobył 6 punktów (8,56%). Mediana tego rozkładu wynosi 8 punktów. Oznacza to, że połowa wszystkich uczniów uczestniczących w badaniu uzyskała wynik niższy lub równy 8 punktów, a połowa wynik wyższy lub równy 8 punktów.

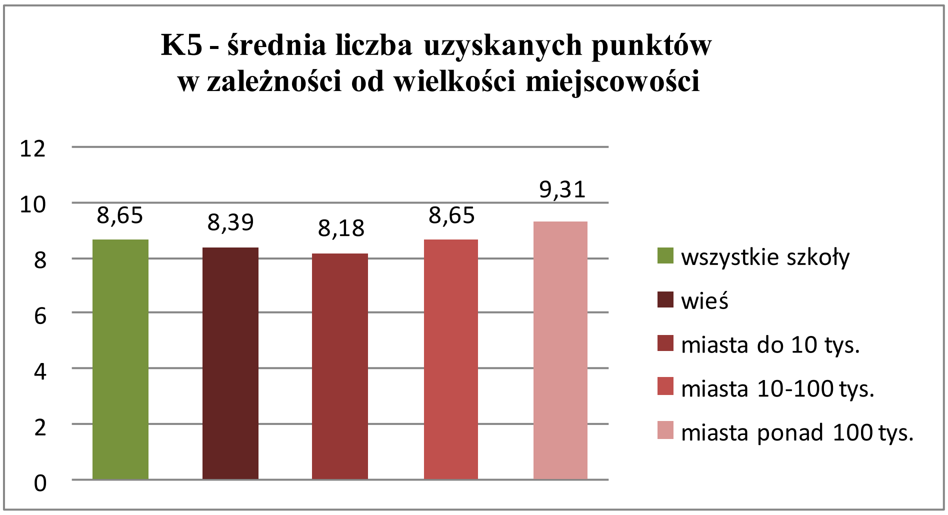
Bardzo niewielu w skali kraju było uczniów, którzy nie rozwiązali ani jednego zadania i uzyskali 0 punktów. Takich uczniów było 492 czyli 0,32% badanych. Znacznie więcej było uczniów, którzy rozwiązali bezbłędnie wszystkie zadania i uzyskali maksymalną liczbę punktów. Było ich w Polsce 1,2% czyli 1844 osoby.

Średnio nie ma różnic między wynikami osiągniętymi przez dziewczynki i chłopców – dotyczy to zarówno całej części matematycznej badania, jak i poszczególnych sprawdzanych w badaniu obszarów.

Zgodnie z założeniami badania wyniki osiągnięte przez konkretnych uczniów i konkretne oddziały powinny służyć nauczycielom do oceny słabych i mocnych stron ich uczniów. Ważne jest, aby nauczyciele przeanalizowali wspólnie z uczniami popełnione przez nich błędy, wspólnie zastanowili się nad ich przyczynami, a następnie tak zaplanowali pracę w klasie VI, aby pod koniec nauki w szkole podstawowej jak najwięcej uczniów mogło wykazać się wszystkimi umiejętnościami określonymi przez podstawę programową jako cele nauczania matematyki – sprawnością rachunkową, umiejętnością modelowania matematycznego, tworzenia strategii rozwiązania oraz prowadzenia prostego rozumowania i wnioskowania.

Także nauczyciele klas, które nie brały udziału w badaniu mogą skorzystać z jego wyników, sprawdzając jak ich uczniowie radzą sobie z opisanymi tutaj zadaniami badającymi określone umiejętności i zwracając szczególną uwagę na zasygnalizowane problemy.

Na kolejnym wykresie przedstawiono średnie wyniki uzyskane w badaniu w zależności od lokalizacji szkół.



Najwyższy wynik uzyskali uczniowie z dużych miast, a najniższy uczniowie z małych miast – różnica wynosi 0,92 punktu. Odchylenie standardowe dla wyniku sumarycznego wynosi 4,18 punkty, różnica ta stanowi więc mniej niż 1/4 odchylenia standardowego uzyskanych wyników, nie jest wiec duża.

2.2. Wnioski ogólne z części matematycznej badania

Pierwsze wymaganie ogólne opisane w podstawie programowej to sprawność rachunkowa. Umiejętności z tego obszaru były sprawdzane tylko przez trzy zadania z zestawu, choć oczywiście umiejętność wykonywania prostych działań arytmetycznych była wykorzystywana także w wielu innych zadaniach. W tej części uczniowie zdobyli 51% możliwych do uzyskania punktów.

Okazało się, że dla uczniów klasy piątej najtrudniejsze są działania na ułamkach zwykłych – tylko 27% uczniów potrafiło te działania poprawnie wykonać. Znacznie lepiej opanowane są umiejętności sprawdzane pozostałymi zadaniami – 65% uczniów potrafiło poprawnie wskazać liczbę 10-krotnie większą i liczbę 100-krotnie mniejszą niż dane ułamki dziesiętne. Również zadanie dotyczące zamiany jednostek długości i jednostek czasu, wymagające także wykonania na nich obliczeń nie było problemem dla 63% uczniów. Co ciekawe to ostatnie zadanie było zdecydowanie łatwiejsze dla uczniów najsłabszych niż dwa wcześniejsze.

Wyniki osiągnięte przez uczniów w tym obszarze świadczą o tym, że sprawność rachunkowa, która jest jedną z podstawowych umiejętności używanych w codziennym życiu oraz jest podstawą do uczenia się matematyki na dalszych etapach kształcenia jest opanowana przez piątoklasistów w średnim stopniu i wymaga jeszcze doskonalenia.

Następne wymaganie ogólne podstawy programowej, którego opanowanie było sprawdzane w badaniu to umiejętność modelowania matematycznego, czyli m.in. dobrania modelu matematycznego do opisanej w zadaniu sytuacji czy przetworzenia tekstu zadania na odpowiednie działania arytmetyczne. Umiejętności z tego obszaru były sprawdzane przez 5 zadań z zestawu, za które można było uzyskać 5 punktów. Uczniowie zdobyli za nie średnio 2,80 punktu, czyli 56% możliwych punktów. Nieco ponad 40% uczniów zdobyło mniej niż połowę punktów, a prawie 60% więcej niż połowę.

Żadne zadanie z tego obszaru nie było bardzo trudne dla uczniów – odsetki poprawnych odpowiedzi wynosiły od 43% – w zadaniu o rozcinaniu kwadratu na prostokąty, do 76% – w zadaniu o przygotowywaniu mniejszej porcji lemoniady według podanego przepisu. To ostatnie zadanie było dla uczniów najłatwiejsze z całego zestawu.

Ze sposobów rozwiązań zadań i popełnianych błędów wynika, że część uczniów ma problemy z odpowiednim użyciem porównywania różnicowego i ilorazowego oraz z właściwym modelowaniem relacji, a w szczególności z odwracaniem ich. Nadal duża część uczniów nie radzi sobie wystarczająco dobrze z pojęciem pola figur – nie rozumie go na poziomie intuicji, ucieka w niepotrzebne używanie wzorów, myli z obwodem.

Ostatnie wymaganie ogólne postawione w podstawie programowej przed uczniami szkoły podstawowej to umiejętność rozumowania i tworzenia strategii. Umiejętności z tego obszaru były sprawdzane przez 5 zadań z zestawu, za które można było uzyskać 10 punktów. Uczniowie zdobyli za nie średnio 4,31 punktu, czyli 43% możliwych punktów. Mediana rozkładu wynosi 4 punkty, co oznacza, że połowa uczniów zdobyła za swoje umiejętności rozumowania i tworzenia strategii od 0 do 4 punktów, a druga połowa od 4 do 10 punktów.

Poziom trudności zadań z tego obszaru był dość wyrównany – wahał się od 34% w zadaniu o budowaniu prostokąta z kwadratów, do 54% w zadaniu dotyczącym objętości i pola powierzchni bryły zbudowanej z sześciennych klocków.

Ze sposobów rozwiązań zadań i popełnianych błędów wynika, że duża część uczniów ma problemy z dostrzeganiem zależności, zarówno o charakterze arytmetycznym (zadanie o kolorowaniu brzegu kwadratu), jak i geometrycznym (zadanie o budowaniu prostokąta z kwadratów). Około połowy uczniów nie radzi sobie wystarczająco dobrze z dobieraniem lub tworzeniem strategii rozwiązania zadania, czyli z wyborem i ustaleniem kolejności czynności prowadzących do rozwiązania przedstawionego problemu. Takie umiejętności trzeba było zaprezentować w dwóch ostatnich zadaniach z zestawu – o koniczynkach i o autokarach.

Oddzielnym problemem jest właściwe ukształtowanie pojęć geometrycznych – obwodu, pola, objętości czy pola powierzchni. Rozumienie tych pojęć jest dość luźno związane z umiejętnościami zaprezentowanymi przez uczniów w pozostałych zadaniach z obszaru rozumowanie i tworzenie strategii.

We części szczegółowej raportu po każdym z zadań oraz po każdym z rozdziałów dotyczących poszczególnych wymagań ogólnych, sformułowane zostały rekomendacje, które mogą pomóc nauczycielom w uczeniu i rozwijaniu u uczniów omawianych umiejętności.

2.3. Wprowadzenie do części szczegółowej raportu z części matematycznej badania

W dalszej części raportu zostaną omówione poszczególne zadania i uzyskane w nich wyniki. Zadania zostaną przedstawione w podziale na umiejętności ogólne opisane w podstawie programowej dla szkoły podstawowej:

- I. Sprawność rachunkowa.
- III. Modelowanie matematyczne.
- IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Omawiając każde zadanie przedstawione zostaną:

- treść zadania,
- wymagania ogólne i szczegółowe, których dotyczy dane zadanie,
- omówienie zadania i sposobów jego rozwiązania,
- wyniki uzyskane w danym zadaniu i ich interpretacja,
- rekomendacje dla nauczycieli do dalszej pracy z uczniami.

W zadaniach otwartych (9, 11, 12 i 13) przedstawione zostaną również schematy oceniania, według których nauczyciele oceniali prace swoich uczniów.

Po omówieniu wszystkich zadań reprezentujących dane wymaganie ogólne przedstawiony zostanie łączny wynik wszystkich zadań z tego obszaru i interpretacja umiejętności uczniów w tym obszarze.

Uczniowie biorący udział w badaniu rozwiązywali dwie wersje zestawu zadań: M1 i M2. Zadania w obu wersjach zestawu były analogiczne – różniły się tylko danymi liczbowymi użytymi w zadaniu, kolejnością proponowanych odpowiedzi lub kolejnością zadań. Ogólne wyniki badania omówione powyżej są połączonymi wynikami dla obu wersji testu. Natomiast w rozdziale prezentującym poszczególne zadania i ich omówienia użyte zostaną zadania z wersji M1 oraz wyniki uczniów rozwiązujących tę wersję testu.

3. Część szczegółowa raportu – omówienie zadań

3.1. Wymaganie ogólne: sprawność rachunkowa

3.1.1. Omówienie wyników

„Uczeń wykonuje proste działania pamięciowe na liczbach naturalnych, całkowitych i ułamkach, zna i stosuje algorytmy działań pisemnych oraz potrafi wykorzystać te umiejętności w sytuacjach praktycznych.”

Ten obszar obejmuje umiejętności bardzo elementarne, które ze względu na ich funkcjonalność można określić jako „narzędziowe”. Sprawność rachunkowa jest umiejętnością wspomagającą wiele innych aktywności nie tylko w zakresie matematyki, ale również w różnych sytuacjach praktycznych. Jest więc ona nie tylko elementem wykształcenia matematycznego, ale także umiejętnością warunkującą sprawne funkcjonowanie w społeczeństwie, stanowi bazę nie tylko dla dalszego uczenia się matematyki, ale także, a może nawet przede wszystkim, dla ogólnego rozwoju intelektualnego i społecznego młodego człowieka.

Kompetencje rachunkowe są kształcone od najwcześniejszych lat, ale kulminacja następuje w szkole podstawowej. To tu jest miejsce na zapoznanie uczniów z podstawowymi algorytmami i doprowadzenie do tego, aby stały się czynnościami oczywistymi, wykonywanymi niemal bez zastanowienia. Brak sprawności rachunkowej może opóźniać lub wręcz blokować osiąganie kolejnych poziomów wiedzy matematycznej. Może tak się stać, gdy rachunki będą dla ucznia główną trudnością podczas rozwiązywania problemu, zastępując pracę nad tym problemem. Stąd wysoka ranga sprawności rachunkowej jako jednego z celów kształcenia w szkole podstawowej. Edukacja matematyczna w gimnazjum nie odcina się od kształcenia tej sprawności, ale nie ma tu już właściwie czasu lekcyjnego na kształcenie podstawowych umiejętnościach rachunkowych. Uczniowie szkoły podstawowej powinni zatem opanować te umiejętności w stopniu co najmniej dobrym, tak aby ich brak nie stanowił przeszkody w poznawaniu kolejnych elementów wiedzy matematycznej.

Umiejętności zawarte w tym obszarze sprawdzane były przez trzy zadania z zestawu – zadanie 1., 2. i 8.

Zadanie 1 (0-1) I

Dokończ zdania. Wybierz liczbę spośród oznaczonych literami A i B oraz liczbę spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba 10 razy większa od liczby 6,78 to	**A***. 67, 8	**B.** 0,678
Liczba 100 razy mniejsza od liczby 12,34 to	**C***. 0,1234	**D.** 0,01234

Wymaganie ogólne: I. Sprawność rachunkowa.

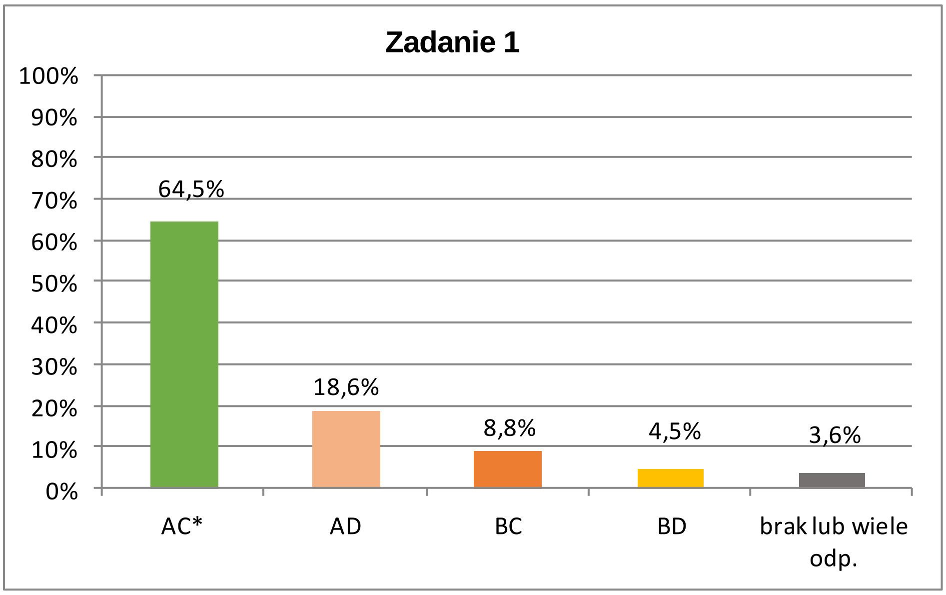
Wymagania szczegółowe: 5. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:

8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych używając własnych poprawnych strategii lub z pomocą kalkulatora.

Zwykle, aby znaleźć liczbę, która jest 10, 100 lub 1000 razy mniejsza lub większa od danej liczby zapisanej w postaci dziesiętnej, trzeba wykonać dwa kroki – najpierw uświadomić sobie, w którą stronę należy przesunąć przecinek, a następnie, o ile miejsc. W pierwszej części tego zadania wystarczyło wykonać tylko pierwszy z tych kroków, ponieważ tylko jedna z proponowanych odpowiedzi jest większa od danej liczby. W drugiej części zadania obie liczby są mniejsze od podanej, więc należało również zastanowić się, o ile miejsc trzeba przesunąć przecinek.

Uczniowie, którzy w pierwszym zdaniu wybrali niepoprawną odpowiedź B, podali liczbę 10 razy mniejszą zamiast większej. Przyczyną takiego błędu może być nieuwaga lub nawyk mechanicznego wykonywania działań bez zastanowienia się nad jego sensem. Może się również okazać, że uczeń, który wskazał w tym zdaniu niepoprawną odpowiedź nie rozumie zapisu liczb dziesiętnych – patrząc na liczbę zapisaną „z przecinkiem” nie zdaje sobie sprawy z jej wielkości.

Uczniowie, którzy wybrali drugą niepoprawną odpowiedź D, podali liczbę 1000 razy mniejszą zamiast 100 razy mniejszej. Oznacza to, że mają oni jeszcze problem z określeniem, o ile miejsc należy przesunąć przecinek.



Zadanie okazało się trudniejsze niż można by przypuszczać – obie liczby wskazało poprawnie tylko 64,5% uczniów. Nie jest to zadawalający wynik, zważywszy, że powiększanie i pomniejszanie liczb 10, 100, 1000 razy jest podstawową umiejętnością rachunkową.

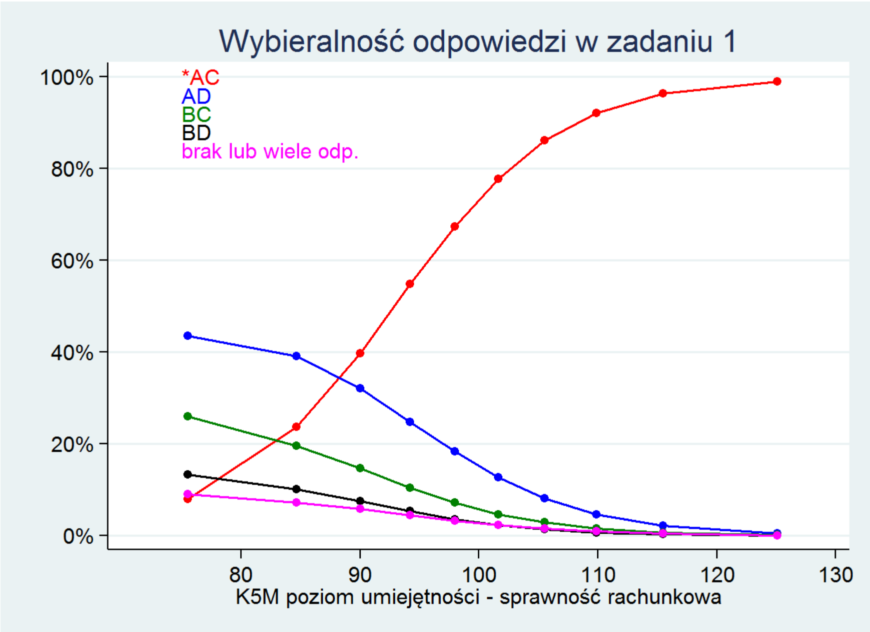
Pierwsze działanie poprawnie wykonało 83,1% uczniów (wszyscy, którzy podali odpowiedzi AC i AD), a drugie działanie 73,3% (odpowiedzi AC i BC).

Błędna odpowiedź B w pierwszym zdaniu, która może wynikać z nieuwagi, ale może też świadczyć o poważnych problemach z rozumieniem działań lub nawet zapisem liczb dziesiętnych została wskazana przez 13,3% uczniów (odpowiedzi BC i BD).

Tylko 4,5% uczniów nie wykonało poprawnie żadnego z działań (odpowiedź BD).

Ostatni szary słupek oznacza uczniów, którzy nie udzieli pełnej odpowiedzi na to zadanie – w ogóle je opuścili, podali wynik tylko jednego działania lub zaznaczyli dwie odpowiedzi do któregoś z działań. Takich uczniów było 3,6% – to stosunkowo wysoki odsetek, jak na zadanie zamknięte.

W tym zadaniu trochę lepsze wyniki osiągnęły dziewczęta – 66% poprawnych rozwiązań, niż chłopcy – 63%.



Powyższy wykres pokazuje, że dla uczniów bardzo dobrych było to bardzo łatwe zadanie – 100% z nich wykonało je poprawnie. Także uczniowie o średnim poziomie umiejętności dobrze sobie z nim poradzili – około 75% tych uczniów rozwiązało je poprawnie. Jednak dla słabych uczniów zadanie okazało się bardzo trudne – poprawną odpowiedź AC wskazało tylko około 10% z nich.

Z wykresu można również przeczytać, że jaki odsetek słabych uczniów wykonał poprawnie poszczególne części zadania. I tak pierwszą część, czyli powiększanie danej liczby 10-krotnie potrafiła wykonać ponad połowa uczniów bardzo słabych (suma odpowiedzi AC i AD). Natomiast zmniejszenie danej liczby 100-krotnie tylko około 35% słabych uczniów (suma odpowiedzi AC i BC) .

Rekomendacje

Umiejętność wykonywania działań na liczbach dziesiętnych można poprawić łącząc standardowe ćwiczenia rachunkowe z sytuacjami realnymi. Jedną z możliwości są operacje na pieniądzach, w których będziemy wykorzystywać ich zapis dziesiętny. Można pytać uczniów np. o kwotę 100 razy mniejszą czy większą od podanej. Rozwiązywanie z uczniami takich zadań pogłębia rozumienie sensu działań, pomaga wyrobić intuicje oraz może skłonić uczniów do sprawdzania sensowności otrzymanej odpowiedzi.

Warto zwrócić uwagę na tych uczniów, którzy w pierwszym zdaniu wskazali błędną odpowiedź B – może to wskazywać na brak zrozumienia sensu działań lub nawet problem z rozumieniem zapisu dziesiętnego liczb.

Zadanie 2 (0-1) I

Wynik jednego spośród podanych niżej działań jest równy 1. Które to działanie?

A. $\frac{2}{9}+\frac{9}{2}$ B. $\frac{6}{7}-\frac{3}{4}$ C*. $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot \frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}:4$

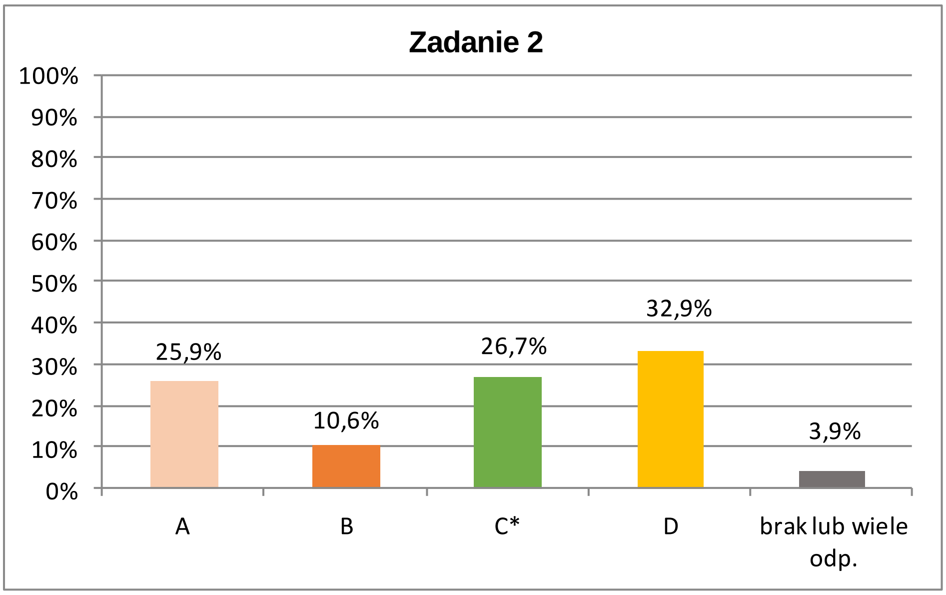
Wymaganie ogólne: I. Sprawność rachunkowa.

Wymagania szczegółowe: 5. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:

1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane.

Rutynowe rozwiązanie tego zadania sprowadza się do wykonania czterech podstawowych działań na ułamkach zwykłych oraz porównania otrzymanych wyników z liczbą 1. Dlatego dla uczniów, którzy bezrefleksyjnie będą rachować, istotna trudność zadania to aż cztery działania do wykonania. Premiowany jest uczeń, który oszacuje wyniki działań. Wyeliminuje on odpowiedź A, bo jest to suma dwóch liczb dodatnich, w której jeden ze składników jest znacznie większy od 1, więc suma też jest większa od 1. Wynik podany w odpowiedzi B także nie może być równy 1, ponieważ od liczby mniejszej od 1 odejmujemy liczbę dodatnią. Podobnie odpada odpowiedź D, bo ćwiartka podzielona na 4 to jeszcze mniej niż ćwiartka, czyli na pewno nie 1. Zatem pozostaje odpowiedź C.

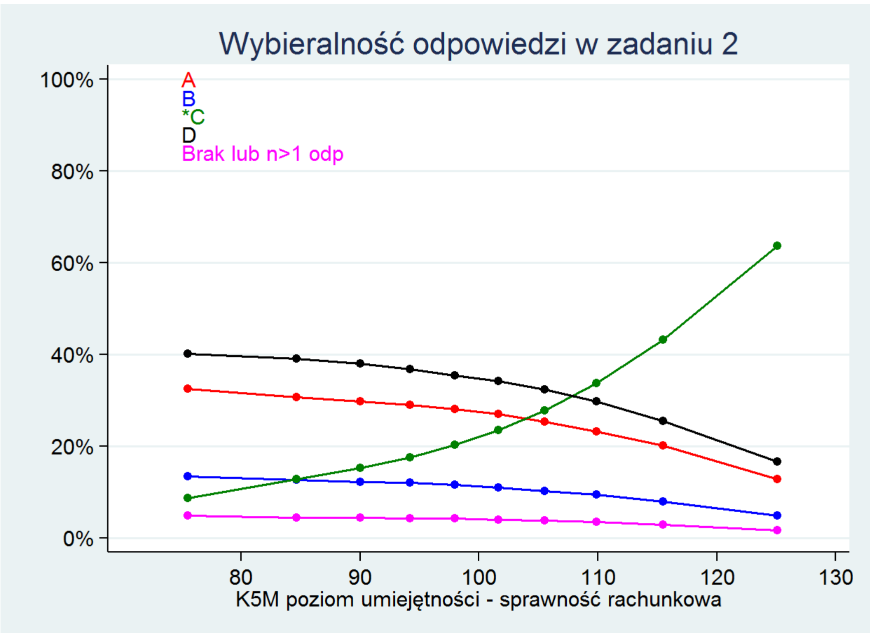
Uczeń, który wybrał odpowiedź A nie umie dodawać ułamków – prawdopodobnie dodał licznik do licznika i mianownik do mianownika. Ten, który wybrał odpowiedź B, podobnie –odjął licznik od licznika i mianownik od mianownika. Wskazanie odpowiedzi D świadczyć może o tym, ze uczeń przepisał licznik i podzielił mianownik przez 4, czyli nie potrafi dzielić ułamków przez liczbę całkowitą.



Okazuje się, że tylko co czwarty uczeń rozwiązał zadanie poprawnie i wskazał odpowiedź C. Co trzeci uczeń ma problemy z dzieleniem ułamków przez liczbę całkowitą (odpowiedź D) i podobnie co trzeci uczeń nie potrafi dodawać lub odejmować ułamków (odpowiedzi A i B). Znów, podobnie jak w poprzednim zadaniu, stosunkowo duży odsetek uczniów nie udzielił żadnej odpowiedzi.

Jest to zdecydowanie najtrudniejsze zadanie z całego zestawu. To zaskakujące, bo mogłoby się wydawać, że najtrudniejsze będą zadania sprawdzające umiejętność rozumowania, a nie umiejętności rachunkowe.

W tym zadaniu nie było różnicy między wynikami osiąganymi przez chłopców i przez dziewczęta.



Wykres potwierdza, że działania na ułamkach zwykłych są bardzo trudne dla uczniów V klasy – niepoprawne odpowiedzi A i D są bardzo licznie wybierane i przez uczniów o najniższych umiejętnościach rachunkowych, i przez uczniów średnich, i nawet przez najlepszych. Również odpowiedź B, choć nie tak często wskazywana jak dwie poprzednie, jest wybierana przez uczniów na każdym poziomie umiejętności. Jest to bardzo rzadka sytuacja, że wszystkie błędne odpowiedzi proponowane w zadaniu są tak często wybierane i to niezależnie od poziomu umiejętności.

Z wykresu można odczytać, że podane w zadaniu działania potrafi wykonać poprawnie nieco ponad połowa (60%) najlepszych uczniów, zaledwie co piąty uczeń o średnich umiejętnościach rachunkowych i co dziesiąty uczeń słaby.

Rekomendacje

Umiejętności wykorzystywane w tym zadaniu można poprawić nie tylko ćwicząc różnorodne operacje na ułamkach. Warto zachęcać uczniów do chwili refleksji i przyjrzenia się liczbom przed przystąpieniem do wykonywania działań. Czasami dzięki temu nie trzeba będzie w ogóle tych działań wykonywać. W innych przypadkach może to uczniom pomóc dostrzec i skorygować popełniony błąd lub absurdalny wynik.

Zadanie 8 (0-1)

Bambus urósł 6 cm w ciągu godziny.

Dokończ zdania. Wybierz jedną odpowiedź spośród A i B oraz jedną spośród C i D.

Bambus w ciągu minuty urósł przeciętnie	**A**. 0,1 mm	**B**.* 1 mm
Jeśli tempo wzrostu tego bambusa nie zmieni się, to w ciągu doby urośnie on	**C**. mniej niż 1 metr	**D**.* więcej niż 1 metr

Wymaganie ogólne: I. Sprawność rachunkowa.

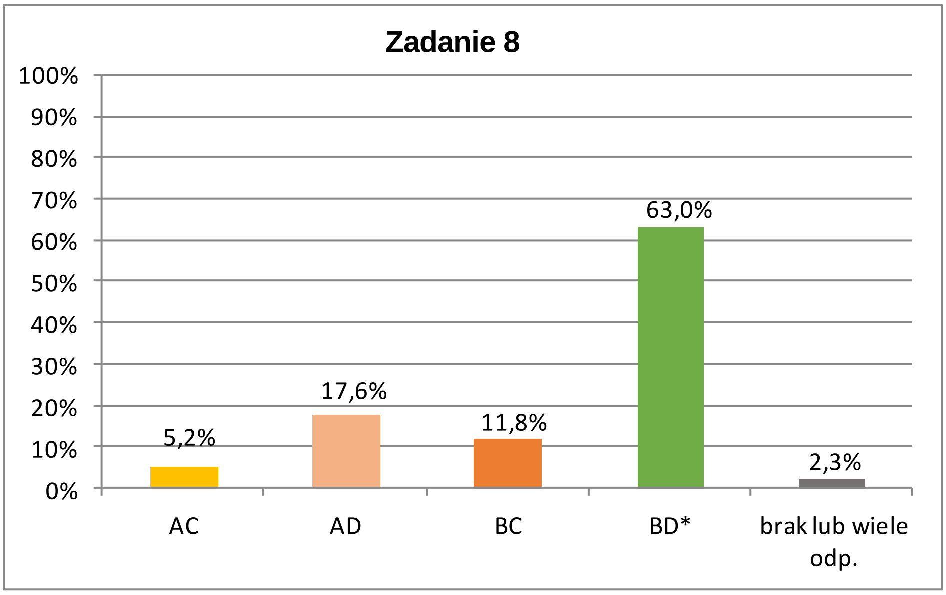
Wymagania szczegółowe: 12. Obliczenia praktyczne. Uczeń:

3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach

6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: metr, centymetr, decymetr, milimetr, kilometr.

9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas przy danej drodze i danej prędkości; stosuje jednostki prędkości: km/h, m/s

W tym zadaniu wybór poprawnej odpowiedzi wymaga oprócz sprawności rachunkowej, także umiejętności zamiany jednostek długości i jednostek czasu oraz obliczenia przyrostu w określonym czasie.



Obie odpowiedzi poprawne podało 63% uczniów. Uczniowie ci nie mają problemu z żadną z wymienionych wyżej umiejętności.

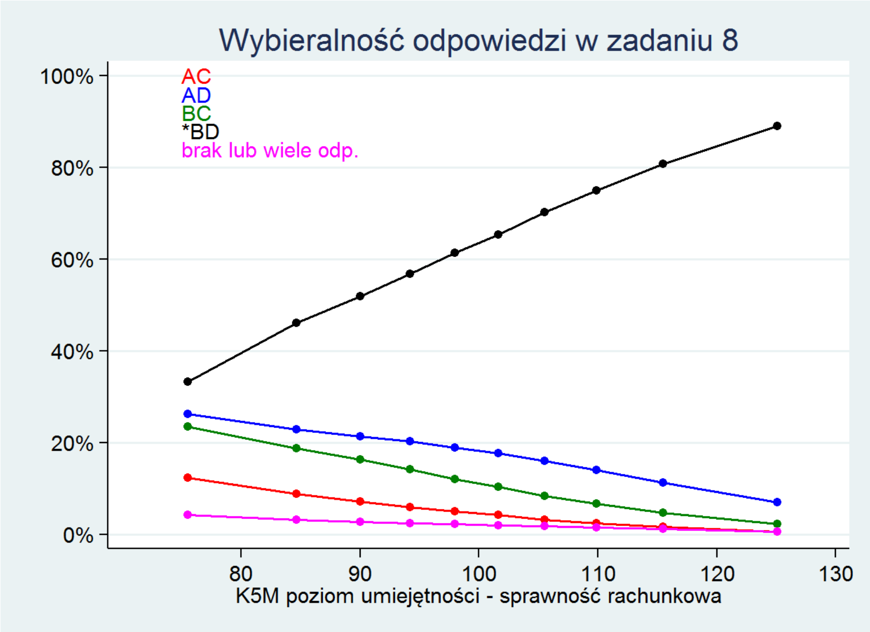
Uczniowie, którzy wybrali błędną odpowiedź A prawdopodobnie poprawnie zamienili godzinę na minuty i poprawnie wykonali dzielenie $6:60=0{,}1$, ale albo zapomnieli o tym, że uzyskany wynik wyrażony jest w centymetrach, albo nie potrafili poprawnie zamienić go na milimetry. Takich uczniów było 22,8% (słupki AC i AD).

Z kolei błędny wybór odpowiedzi C wynikać może albo z błędnej zamiany jednostek (doby na godziny lub centymetrów na metry) albo z błędu w mnożeniu 24 · 6. Tę błędną odpowiedź C wybrało 18% uczniów (słupki AC i BC).

Wśród wymienionych wyżej uczniów, którzy popełnili któryś z opisanych błędów, tylko 5,2% błędnie wykonało oba przeliczenia.

W tym zadaniu odsetek uczniów, którzy nie udzielili żadnej odpowiedzi lub wybrali więcej niż jedną odpowiedź jest mniejszy niż w poprzednich zadaniach sprawdzających sprawność rachunkową i wynosi 2,3%.

W tym ostatnim zadaniu z obszaru sprawności rachunkowej trochę lepsze wyniki osiągnęli chłopcy – 65% poprawnych rozwiązań, niż dziewczęta – 61%.



Wykres pokazuje, że dla uczniów najsłabszych zamiana jednostek jest stosunkowo najłatwiejszą umiejętnością rachunkową spośród tych sprawdzanych w badaniu. W dwóch poprzednich zadaniach odsetek poprawnych odpowiedzi wśród uczniów najsłabszych nie przekraczał 10%. Natomiast w tym zadaniu jest on równy około 35%.

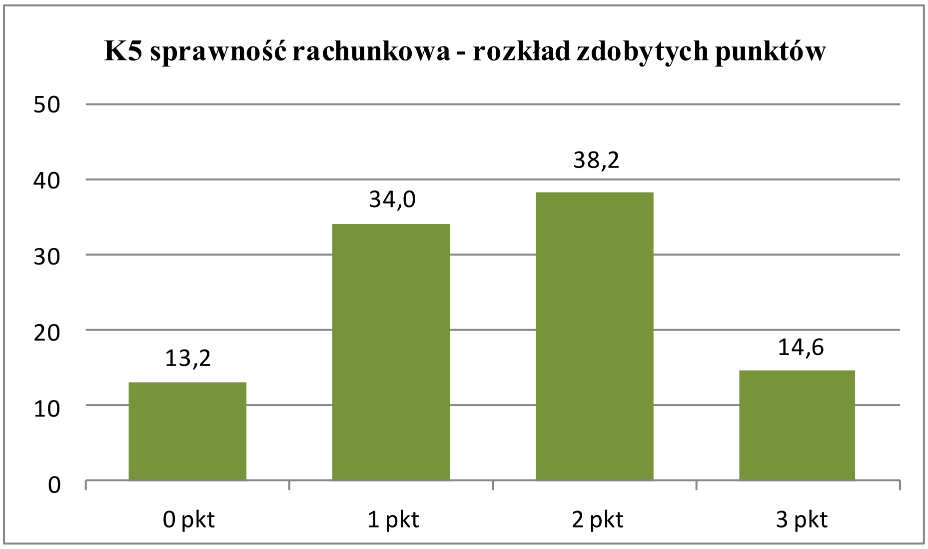
Warto zauważyć również, że nawet wśród uczniów najlepszych odsetek poprawnych odpowiedzi nie jest równy 100% – około 10% z nich popełniło błąd w pierwszej części zadania, wybierając odpowiedź A.

Rekomendacje

Umiejętności niezbędne w tym zadaniu można poprawić, ćwicząc z uczniami nie tylko typową, nudną zamianę jednostek, ale również szukając kontekstów praktycznych. Pomoże to wywołać zainteresowanie uczniów, uświadomić potrzebę zamiany jednostek i zachęcić do poszukiwania sposobów ich przeliczania. Warto również znaleźć jak najwięcej różnorodnych kontekstów praktycznych, które będą odpowiednikiem typowych zadań typu: prędkość-droga-czas. Sytuacji, w których uczeń będzie obliczał zmianę, jak zaszła w określonym czasie, czy mając podane tempo „dziania się” pewnego zjawiska, będzie musiał obliczyć czas, jaki jest potrzebny, by to zjawisko się wydarzyło.

3.1.2. Sprawność rachunkowa – podsumowanie

W zadaniach sprawdzających sprawność rachunkową uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 3 punkty. Wykres poniżej pokazuje rozkład uzyskanych punktów.



Średnio uczniowie zdobyli w tym obszarze 1,54 punktu, czyli 51% możliwych do uzyskania punktów.

Bardzo podobny był odsetek uczniów, którzy rozwiązali poprawnie wszystkie zadania i uzyskali 3 punkty (14,6%) i tych, którzy nie potrafili rozwiązać ani jednego zadania i w związku z tym uzyskali 0 punktów (13,2%). Oznacza to, że mniej więcej co siódmy uczeń bardzo dobrze radzi sobie z rachunkami i również co siódmy nie radzi sobie z nimi w ogóle lub ma w tym obszarze bardzo poważne braki. Pozostali uczniowie znów niemal pół na pół rozwiązali poprawnie jedno lub dwa zadania.

Takie wyniki świadczą o tym, że sprawność rachunkowa, która jest jedną z podstawowych umiejętności używanych w codziennym życiu oraz jest podstawą do uczenia się matematyki na dalszych etapach kształcenia, jest opanowana przez piątoklasistów w średnim stopniu i wymaga jeszcze doskonalenia.

W zakresie sprawności rachunkowej średnio nie ma różnic między dziewczynkami i chłopcami – w jednym zadaniu nie było różnicy w wynikach, jedno zadanie lepiej rozwiązały dziewczynki, a jedno – chłopcy.

3.1.3. Sprawność rachunkowa – wnioski i rekomendacje

Problemy uczniów z działaniami na ułamkach zwykłych i dziesiętnych mogą wynikać z niewłaściwego przyswojenia pojęcia ułamka. Często uczeń patrząc na ułamek widzi tylko dwie liczby przedzielone kreską albo kilka cyfr z przecinkiem – nie kojarząc nawet jego wielkości, np. jakiego rzędu to jest wielkość, czy jest to liczba większa czy mniejsza niż jeden. Wynika to najczęściej ze zbyt szybkiego odejścia od ćwiczeń na konkretach, które pozwalają na intuicyjne zrozumienie ułamków oraz wszelkich operacji na nich. Część słabszych uczniów, którzy nie rozumieją pojęcia ułamka zwykłego na poziomie intuicji, radzą sobie, próbując wykonywać działania na ułamkach podobnie, jak na liczbach naturalnych. Skutkiem takiej strategii są typowe błędy, np. dodawanie ułamków według schematu "licznik do licznika, mianownik do mianownika". Wprowadzając pojęcie ułamka i ucząc działań na nich, należy zatem przejść drogę od konkretu do uogólnienia – konkretne sytuacje należy analizować tak długo, aż uczniowie sami stworzą własne poprawne intuicje.

Sprawność rachunkową uczniów można poprawić, ćwicząc różnorodne operacje na ułamkach dziesiętnych i zwykłych tak, aby każdy uczeń miał możliwość utrwalenia wypracowanych wcześniej intuicji działań i nabył sprawności w wykonywaniu tych działań.

Warto łączyć standardowe ćwiczenia rachunkowe z sytuacjami realnymi. Rachunki przeprowadzane na przykładach wziętych „z życia” dają uczniom większą szansę dostrzeżenia popełnionych błędów lub absurdalnych wyników. Rozwiązywanie z uczniami takich zadań również pogłębia rozumienie sensu działań i zapisu liczb.

Zachęcamy również do rozwiazywania w klasie zadań, w których uczniowie poczują korzyści płynące z szacowania. Dzięki tego typu zadaniom mamy szanse przekonać uczniów, że przed przystąpieniem do wykonywania rachunków zawsze warto przyjrzeć się liczbom i „z grubsza” ocenić wynik. W wielu przypadkach taki sposób rozwiazania może im oszczędzić wiele pracy, czasami dzięki temu nie będą musieli w ogóle tych działań wykonywać. A co najważniejsze może to pomóc uczniom dostrzec i skorygować popełniony błąd.

3.2. Wymaganie ogólne: modelowanie matematyczne

3.2.1. Omówienie wyników

„Uczeń dobiera odpowiedni model matematyczny do prostej sytuacji, stosuje poznane wzory i zależności, przetwarza tekst zadania na działania arytmetyczne i proste równania.”

Od uczniów szkoły podstawowej trudno oczekiwać wprawy w tworzeniu modeli obiektów, związków czy procesów. Na tym etapie uczniowie stawiają dopiero pierwsze kroki w modelowaniu i dopiero na dwóch kolejnych etapach edukacyjnych rozwiną swoje umiejętności w tym zakresie. Zatem modelowanie na poziomie szkoły podstawowej ogranicza się do dobierania gotowych modeli do prostych sytuacji, czy prostej matematyzacji sytuacji opisanej w zadaniu za pomocą działań arytmetycznych lub nieskomplikowanych równań.

Umiejętności zawarte w tym obszarze sprawdzane były przez pięć zadań z zestawu – zadanie 3, 4, 5, 6 i 9.

Zadanie 3	**(0-1)**	**III**

Marzena przygotowywała lemoniadę korzystając z przepisu podanego obok. Ponieważ miała tylko 2 cytryny, wlała do naczynia sok z tych cytryn i 3 szklanki wody.

Ile łyżek cukru powinna dodać?

A. 3 B. 4* C. 5 D. 6 E. 7

LEMONIADA

- 6 szklanek wody
- sok z 4 cytryn
- 8 łyżek cukru

Wymaganie ogólne: III. Modelowanie matematyczne.

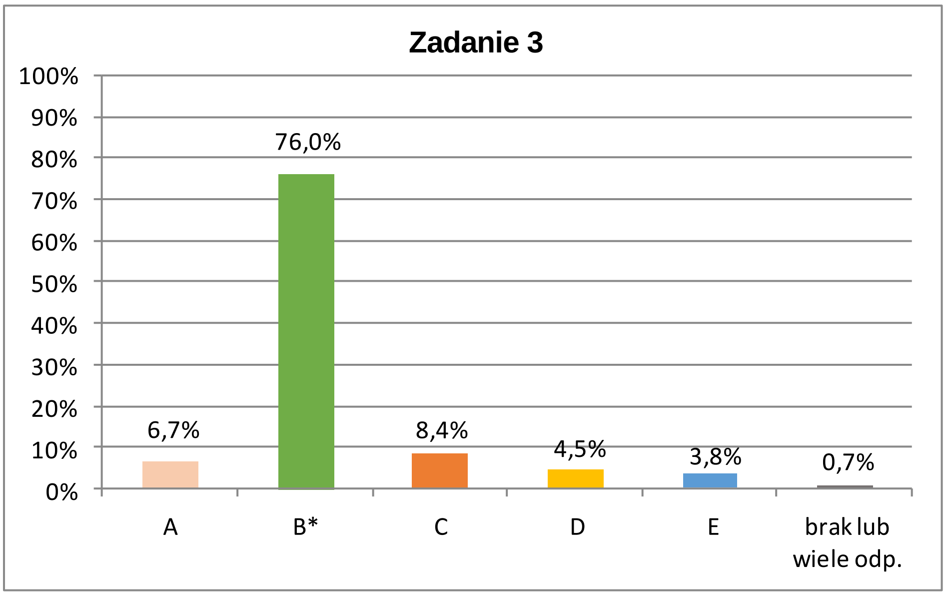
Wymagania szczegółowe: 2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:

6) porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne.

13. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:

2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.

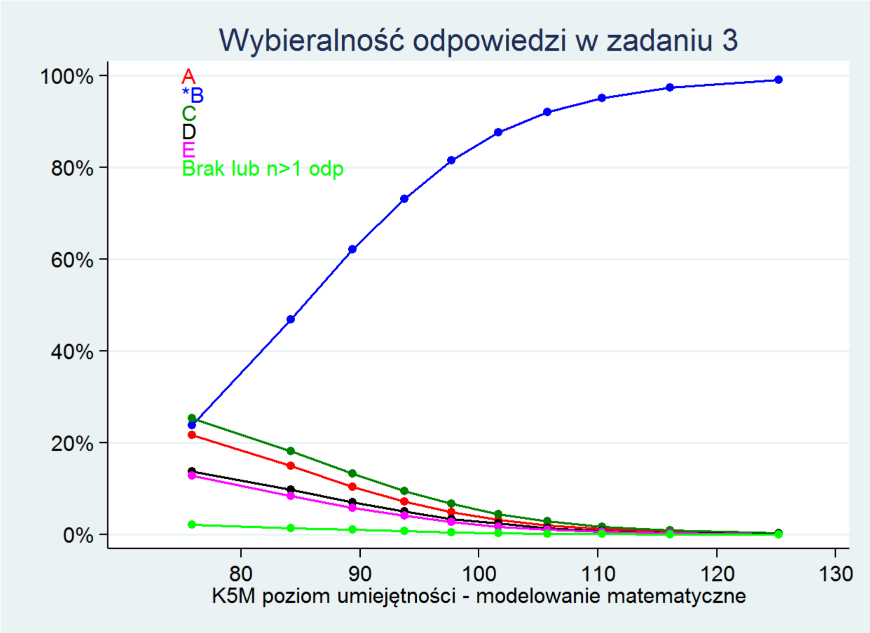
Zadanie ma nieco złożoną formę – informacje zawarte są w tekście i na kartce z przepisem. Aby je rozwiązać, trzeba uważnie przeczytać treść i zmatematyzować sytuację przekładając użycie przepisu dla innej porcji lemoniady na działania arytmetyczne. Stosowanie przepisu jest na tyle bliskie uczniom, że nie muszą posługiwać się proporcją. Wystarczy mówić o porcji, dwóch porcjach, czy połowie porcji lemoniady i wykorzystać porównywanie ilorazowe.



Było to najłatwiejsze zadanie matematyczne – zostało poprawnie rozwiązane przez 76% uczniów.

Dystraktory w zadaniu zostały dobrane nieprzypadkowo. Wybór każdego z nich pozwala przypuszczać o popełnieniu przez ucznia konkretnego błędu. Zauważmy, że dziewczynka wlała do dzbanka o 3 szklanki wody mniej niż w przepisie i wykorzystała o 2 cytryny mniej. I tak wybór odpowiedzi C (8,4%) wskazuje na pomniejszenie liczby łyżek cukru podanej w przepisie o 3, odpowiedź D (4,5%) – o 2, a odpowiedź A (6,7%) – o 5 (2+3). W każdym z tych przypadków uczniowie wykorzystali porównywanie różnicowe zamiast ilorazowego. Warto zwrócić uwagę na tych uczniów, gdyż mogą oni mieć w gimnazjum problem z rozumieniem proporcji.

Zadanie było równie łatwe dla dziewczynek i dla chłopców – nie ma różnicy w osiąganych przez nich wynikach.



Zadanie było łatwe dla uczniów o średnich i wysokich umiejętnościach (odpowiednio około 85% i 100% poprawnych odpowiedzi). Nawet wśród uczniów najsłabszych poprawna odpowiedź była jedną z dwóch najczęściej wybieranych.

Rekomendacje

Kłopoty części uczniów z właściwą matematyzacją sytuacji opisanej w zadaniu wskazują na potrzebę powrotu do zadań, które pozwolą uczniom wyczuć różnicę między porównywaniem różnicowym i ilorazowym. Warto również systematycznie sięgać po zadania, których rozwiązania opierają się na zrozumieniu i powiązaniu informacji podanych w różnej formie. Zachęcamy nauczycieli do samodzielnego tworzenia odpowiednich zadań osadzonych w kontekstach realnych oraz do wykorzystania inwencji twórczej uczniów.

Zadanie 4 (0-1) III

Ola będzie obchodziła 18 urodziny za 2 lata. Dziś Ola jest 4 razy starsza od Mikołaja.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Dziś Mikołaj ma 5 lat.	P	F*
Za 2 lata Ola będzie 3 razy starsza od Mikołaja.	P*	F

Wymaganie ogólne: III. Modelowanie matematyczne.

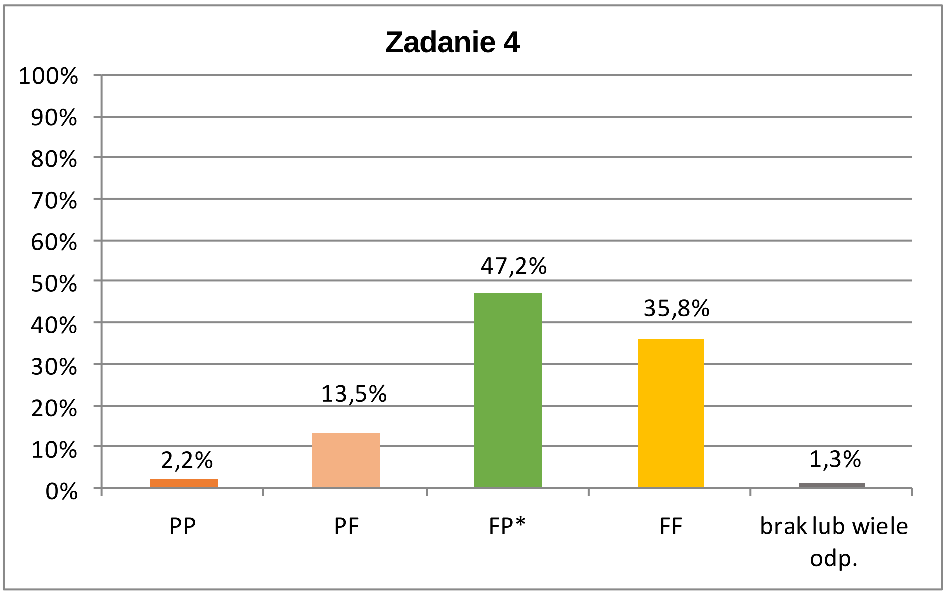
Wymagania szczegółowe: 2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:

6) porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne.

12. Obliczenia praktyczne. Uczeń:

4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach.

Zadanie osadzone jest w realiach bliskich uczniom. Trudnością w jego rozwiązaniu jest konieczność rozważania wieku Oli i Mikołaja w dwóch sytuacjach – dziś i za 2 lata. Do rozwiązania tego zadania potrzebna jest więc przede wszystkim umiejętność rozumienia zależności między podanymi informacjami oraz uporządkowania i zapisania ich w wygodny dla ucznia sposób – np. w tabeli lub używając schematu (wiek każdej osoby teraz i za 2 lata), tak, by łatwo było identyfikować konkretną sytuację z odpowiednimi liczbami. Obliczenia odgrywają tu rolę drugoplanową, są banalnie proste i nie stanowią żadnej bariery w rozwiązaniu. Istotne jest natomiast, aby uczeń rozumiał, że za 2 lata każdy będzie o 2 lata starszy, a 3 lata temu każdy miał o 3 lata mniej, oraz aby sprawnie odwracał podane relacje między wiekiem Oli i Mikołaja: Ola jest 4 razy starsza od Mikołaja, czyli Mikołaj jest 4 razy młodszy od Oli.



Obu poprawnych odpowiedzi udzieliło tylko 47,2% uczniów.

Pierwszą część zadania rozwiązało 83% uczniów, a drugą – tylko 49,4% uczniów.

Błędne odpowiedzi wybierało odpowiednio: w pierwszej części zadania – 15,7%, w drugiej części zadania – 49,3% uczniów.

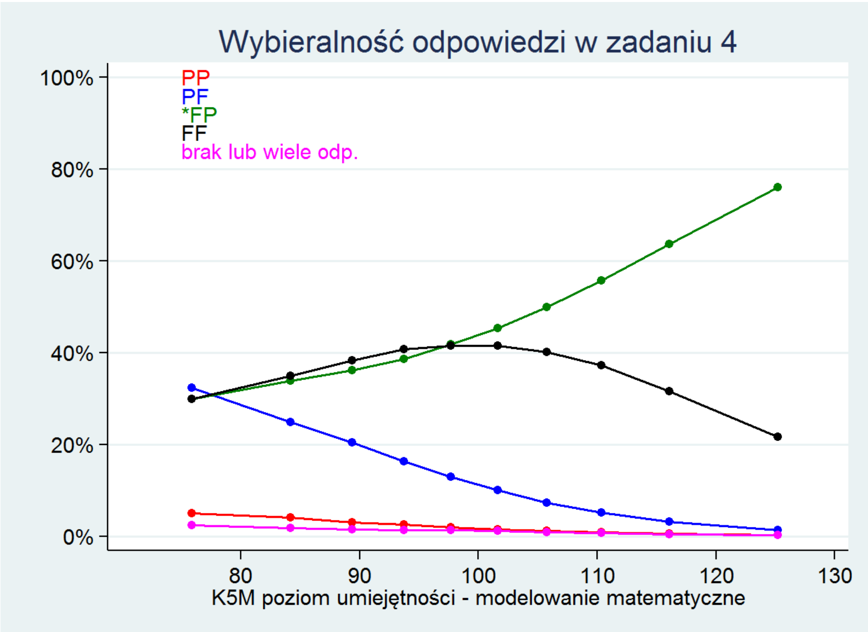
1,3% uczniów nie podało kompletnej odpowiedzi lub zaznaczyło więcej niż dwie odpowiedzi.

Uczniowie, którzy zaznaczyli błędną odpowiedź P w pierwszym zdaniu, czyli obliczyli, że Mikołaj ma dziś 5 lat, przypuszczalnie wcześniej błędnie wyznaczyli obecny wiek Oli, dodając 2 lata do 18 lat, zamiast odjąć. Co ciekawe, spośród tych osób tylko 2,2% (wszystkich rozwiązujących) wybrało w drugim zdaniu sprzeczną z pierwszym wyborem odpowiedź P. Pozostałe 13,5% wybrało zgodną z pierwszym wyborem odpowiedź F. Proporcja tych grup jest jak 1:6.

Natomiast spośród 83% uczniów, którzy w pierwszym zdaniu wybrali poprawną odpowiedź F, aż 36% (wszystkich rozwiązujących) w drugim zdaniu również wybrało odpowiedź F – sprzeczną z pierwszym wyborem. Pozostałe 47% wybrało odpowiedź P i tym samym podało obie odpowiedzi poprawne. W tym przypadku proporcja tych grup jest jak 3:4.

Być może oznacza to, że część uczniów, którzy w pierwszym zdaniu wybrali poprawną odpowiedź F, uzyskało ją „przypadkiem”. Być może odpowiadali oni, że nieprawdą jest, że Mikołaj ma 5 lat, wcale nie dlatego, że poprawnie obliczyli, że ma on 4 lata. Być może odpowiadali tak, ponieważ popełnili jakiś inny błąd, w wyniku którego wiek Mikołaja, który obliczyli, był inny niż proponowana odpowiedź 5 lat, ale również inny niż poprawna odpowiedź 4 lata.

W tym zadaniu, podobnie jak w poprzednim z tego obszaru, nie było różnic między wynikami dziewcząt i chłopców.



Na tym wykresie również widać, że analizowany powyżej układ odpowiedzi FF „zachowuje się dziwnie”. Częstość jej wyborów do pewnego momentu rośnie wraz ze wzrostem umiejętności uczniów, zamiast maleć, tak, jak to się dzieje dla innych odpowiedzi niepoprawnych.

Wykres pokazuje również, że zadanie zostało poprawnie rozwiązane przez około 30% uczniów najsłabszych, około 45% uczniów o średnich umiejętnościach oraz niespełna 80% uczniów najlepszych. Okazuje się ono zatem dość „płaskie”, słabo różnicujące uczniów – częstość poprawnych odpowiedzi nie rośnie wraz ze wzrostem umiejętności uczniów tak szybko, jak w wielu innych zadaniach.

Rekomendacje

Zasadnicza trudność tego zadania to nie rachunki, ale rozumienie podanych zależności i zapisanie ich w czytelny dla ucznia sposób. Kształtowanie takich umiejętności można zorganizować na przykład poprzez rozwiązywanie zadań typu: młodszy – starszy, cięższy – lżejszy, dłuższy – krótszy. W przypadku zadań typu młodszy – starszy w pierwszej kolejności warto wyćwiczyć samo obliczanie wieku osób występujących w zadaniu, uwzględniając upływ czasu oraz stosując porównywanie różnicowe i ilorazowe. W drugiej kolejności proponujemy stawiać pytania dotyczące porównania wieku tych osób – tu dobrym pomysłem jest ilustrowanie momentów porównywania na osi czasu. Zachęcamy również do budowania zadań przez samych uczniów. Zaczynamy wówczas od tworzenia danych, przedstawiania ich w tabeli lub zapisywania schematem, korygowania i stawiania pytań do tych danych. To bardzo kształcące ćwiczenia, szczególnie w sytuacjach, kiedy pytanie ucznia wymaga zmiany danych.

Zadanie 5 (0-1) III

W tabelce przedstawiono kilka informacji o klasie 5A.

Liczba wszystkich uczniów w klasie	24
Liczba uczniów, którzy uczą się języka hiszpańskiego	8
Liczba uczniów, którzy uczą się języka francuskiego	6
Liczba uczniów, którzy potrafią grać w szachy	16
Liczba uczniów, którzy potrafią pływać	18

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Języka francuskiego uczy się $\frac{1}{4}$ klasy.	P*	F
Pływać potrafi $\frac{3}{4}$ klasy.	P*	F

Wymaganie ogólne: III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe: 14. Zadania tekstowe. Uczeń:

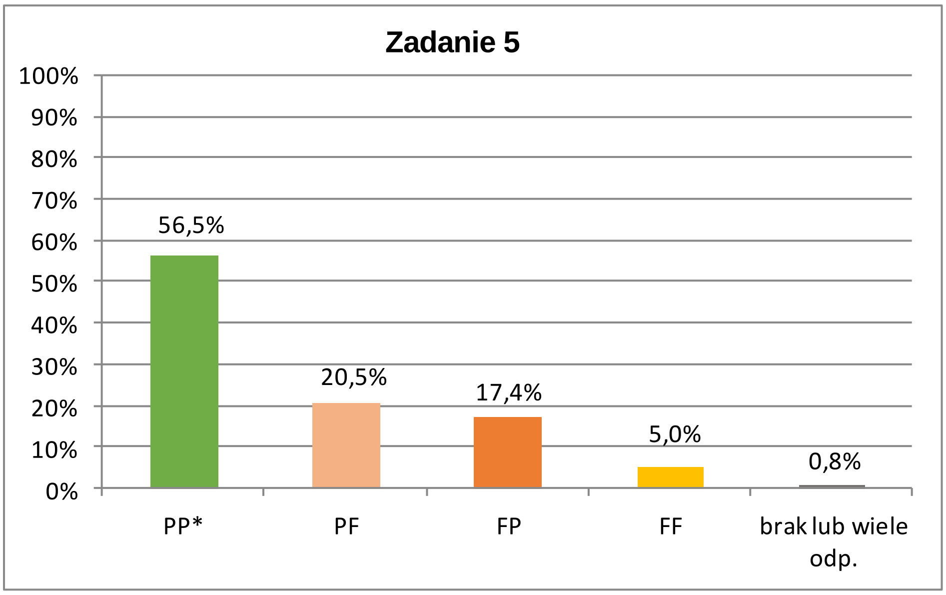
1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe.

12. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:

1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka.

Aby poprawnie rozwiązać zadanie należało wybrać z tabeli potrzebne informacje, a następnie dobrać odpowiednie operacje arytmetyczne tak, aby za pomocą ułamka zapisać podane grupy uczniów jako części całej klasy.

Pierwsza część zadania powinna być dla uczniów stosunkowo łatwiejsza niż druga, ponieważ obliczenie $\frac{1}{4}$ (ćwiartki) jakiejś całości jest bardziej intuicyjne i prostsze rachunkowo niż $\frac{3}{4}$. Z kolei pierwszy obliczony ułamek można wykorzystać do rozwiązania drugiej części: skoro liczba dzieci, które potrafią pływać jest 3 razy większa niż liczba dzieci, które uczą się francuskiego, to oznacza, że jeden ułamek musi być 3 razy większy niż drugi. Oczywiście Uczniowie mogli pójść też inną drogą, zbudować ułamki $\frac{6}{24}$ i $\frac{18}{24}$, a następnie skrócić je, nie wnikając w zależność między nimi.



Obu poprawnych odpowiedzi udzieliło 56,5% uczniów.

Pierwszą część zadania rozwiązało poprawnie 77% uczniów, a drugą – 74% uczniów.

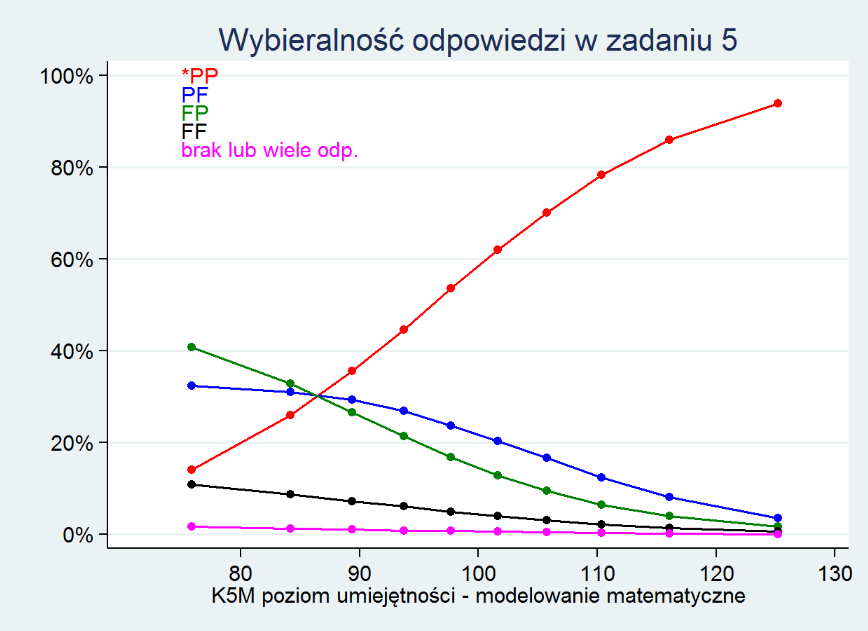
Błędne odpowiedzi wybierało odpowiednio: w pierwszej części zadania – 22,4%, w drugiej części zadania – 25,5% uczniów.

0,8% uczniów opuściło to zadanie albo zaznaczyło więcej niż jedną odpowiedź do co najmniej jednego z poleceń.

Okazuje się, że przynajmniej co piaty uczeń – ci, którzy którzy podali odpowiedzi PF – nie widział związku lub nie szukał związku między ułamkami $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$. Nie wykorzystywali oni poprawnie rozwiązanej pierwszej części do rozwiązania drugiej.

Niewiele mniej było uczniów (17,4%), którzy nie potrafili poprawnie obliczyć $\frac{1}{4}$ klasy, a potrafili $\frac{3}{4}$. Oznacza to prawdopodobnie, że w pierwszej części zadania skorzystali z niewłaściwych danych liczbowych, albo popełnili tam błąd rachunkowy, albo po prostu „strzelali".

W tym zadaniu znacznie lepsze wyniki osiągnęli chłopcy – 61% poprawnych odpowiedzi, niż dziewczynki – 52%. Było to zadanie, w którym różnica między dziewczynkami i chłopcami jest największa.



Wykres pokazuje, że opisywanie części danej całości za pomocą ułamka bądź obliczanie ułamka z liczby jest bardzo trudne dla słabych uczniów – odpowiedź PP wybrało tylko około 15% z nich. Z kolei najlepsi nie mają z tym problemu – poprawną odpowiedź wskazało około 95% uczniów.

Trudno jednoznacznie zinterpretować krzyżowanie się linii dla odpowiedzi FP i PF. Może to potwierdzać hipotezę, że różne były mechanizmy i powody wybierania tych odpowiedzi.

Rekomendacje

To zadanie jest dobrym materiałem ćwiczeniowym, szczególnie dla słabszych uczniów, ponieważ treść nie jest zbyt złożona, jeśli chodzi o zawartość informacji, ale jednocześnie zawiera zbędne dane. Dobrym ćwiczeniem dla wszystkich uczniów jest rozwiązywanie zadań zawierających informacje podane w różnej postaci – tabel, diagramów, schematów. Warto zaczynać od struktur mniej skomplikowanych, takich, jak to zadanie. Istotne jest także, aby przynajmniej niektóre z tych zadań zawierały więcej informacji i danych, niż potrzebna do rozwiązania. Warto przebudowywać zadania typowe – przedstawiać dane w różnej postaci, dodawać dodatkowe informacje, odnosić się w pytaniach do różnych danych.

Przy rozwiązywaniu takich zadań uczniowie powinni mieć możliwość stosowania i prezentowania własnych sposobów porządkowania informacji zapisanych w treści zadania, uwzględniając odrzucenie zbędnych informacji i wybranie istotnych. Wypracowanie przez uczniów własnych sposobów zapisu danych i związków między nimi będzie łatwiejsze, jeśli umożliwimy uczniom obserwację różnorodnych pomysłów zapisu prezentowanych przez koleżanki i kolegów.

Opisywanie części danej całości za pomocą ułamka bądź obliczanie ułamka z liczby warto ćwiczyć wybierając lub tworząc zadania związane z zagadnieniami bliskimi uczniom, korzystając z realnych sytuacji, rysunków, schematów Można wówczas liczyć na to, że uczeń kojarząc wykonywane czynności z rachunkiem i wynikiem łatwiej zrozumie sens i zapamięta sposób liczenia.

Zadanie 6 (0-1) III

Kwadrat o boku 10 cm rozcięto na dwa jednakowe prostokąty.

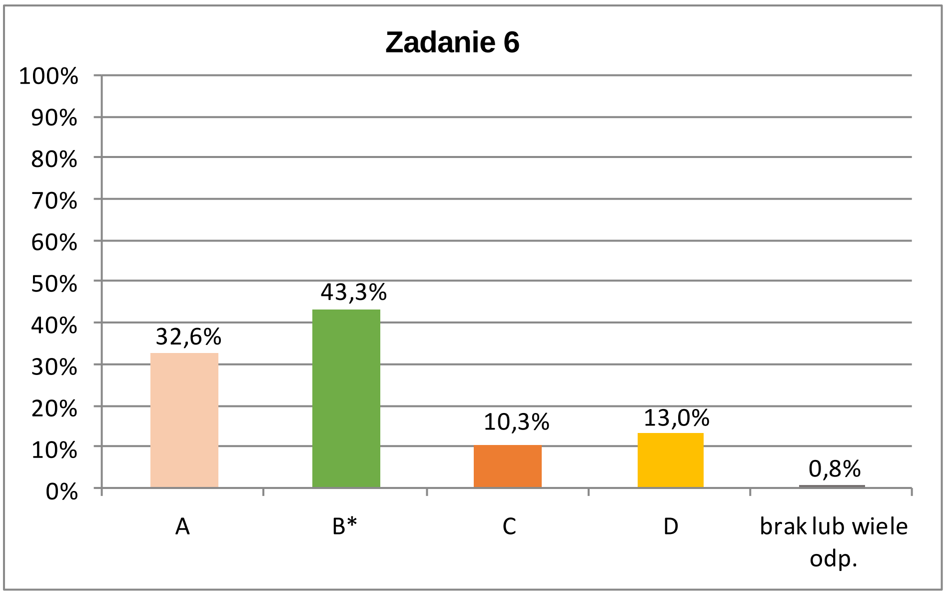
Dokończ poniższe zdanie – wybierz odpowiedź spośród podanych.

Obwód każdego z tych prostokątów jest równy

A. 20 cm **B.*** 30 cm **C.** 40 cm **D.** 50 cm

Wymaganie ogólne:	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe:	11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
	1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków.

Przy rozwiązaniu tego zadania dużą rolę odegrało doświadczenie geometryczne ucznia. Jeśli wcześniej manipulował figurami, składał je, rozcinał, obserwował pola i obwody, nie miał problemu z wyborem właściwej odpowiedzi.



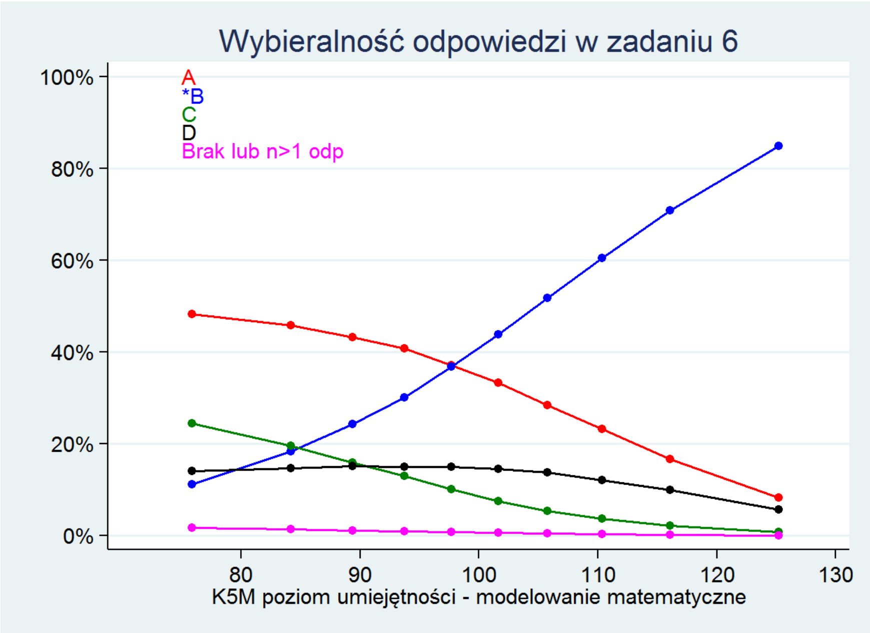
Zadanie zostało rozwiązane poprawnie zaledwie przez 43,3% uczniów.

Co trzeci uczeń wybrał błędną odpowiedź A. Tę odpowiedź otrzymamy, jeśli obliczymy obwód kwadratu i podzielimy go na pół. Uczniowie, którzy wybrali tę odpowiedź nie zauważyli, że do tak obliczonej wielkości muszą doliczyć jeszcze długość boku prostokąta, który powstał w wyniku podziału. Taki błąd świadczy o braku wyobraźni geometrycznej uczniów, która została zastąpiona przez mechaniczne wykonywanie obliczeń.

Wybór odpowiedzi C może świadczyć o tym, że uczniowi wydaje się, że obwody otrzymanych prostokątów są równe obwodowi kwadratu. Taką odpowiedź dał co dziesiąty uczeń.

Z kolei odpowiedź D otrzymali uczniowie, którzy pomylili obwód z polem – obliczyli pole kwadratu i podzielili je na dwa. Ten błąd zrobiło 13% uczniów.

Wyniki osiągane w tym zadaniu przez dziewczęta i chłopców nie różniły się.



Wykres pokazuje, że najczęstsza błędna odpowiedź A, związana z brakiem wyobraźni geometrycznej, była wybierana zarówno przez uczniów słabych (ok. 50%), średnich (ok. 35%), jak i przez najlepszych (10%).

Ciekawe jest również, że błędną odpowiedź D, związaną z pomyleniem obwodu z polem, wybierał bardzo podobny odsetek uczniów, niezależnie od ich poziomu umiejętności modelowania – czarna linia na wykresie układa się na poziomie 15% wyborów prawie przez całą długość.

Rekomendacje

Jeśli chcemy, aby nasi uczniowie mieli wyrobioną wyobraźnię geometryczną i nie popełniali błędów takich, jak w tym zadaniu, należy dawać im jak najczęściej okazję do manipulowania figurami czy bryłami. Na przykład stwarzać im możliwość obserwacji, jak zmieniają się pola i obwody figur powstałych w wyniku działań na danych figurach – rozcinania ich według ustalonych reguł czy doklejania do nich innych figur. Należy także zachęcać uczniów do dostrzegania prawidłowości występujących przy takich przekształceniach figur.

Na przykład można „przedłużyć” omawiane zadanie, rozcinając kwadrat na 3, 4, itd. jednakowe prostokąty. Po rozwiązaniu takiej serii zadań koniecznie należy zatrzymać się i wspólnie z uczniami przyjrzeć otrzymanym wynikom: Co nam mówią? Jak można je zinterpretować? Czy nie podpowiadają one innego, może prostszego sposobu rozwiązania? A może otrzymany wynik przyda się do rozwiązania innego, trudniejszego zadania? Taki „rzut oka wstecz” na rozwiązaną serię zadań oraz na otrzymane wyniki może zachęcić uczniów do bardziej ogólnego, syntetycznego spojrzenia na postawiony problem, a w konsekwencji może ułatwić dostrzeżenie ogólniejszych, bardziej uniwersalnych rozwiązań.

Rozwiązaną serię zadań warto uogólnić, na przykład przechodząc do oznaczeń literowych. Po rozwiązaniu zadań z konkretnymi danymi liczbowymi i interpretacji wyników, gdy już uczniowie uchwycą istotne zależności, przechodzimy do wyrażeń algebraicznych. Dzięki temu mamy dobry materiał do ćwiczenia umiejętności modelowania i algebraizacji, a także dajemy okazję dostrzeżenia prawidłowości i reguł tym uczniom, którzy lepiej czują się w obszarze algebry niż geometrii.

Rozwiązywanie takich serii zadań to także dobra okazja do uczenia stawiania hipotez i ich weryfikowania, uzasadniania swoich tez i argumentowania.

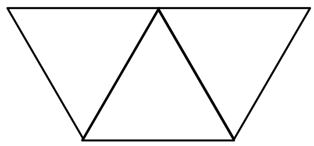
Zadanie 9 (0-1)

Na rysunku przedstawiono trapez złożony

z trzech jednakowych trójkątów równobocznych.

Pole każdego z tych trójkątów jest równe 10 cm^2.

Jakie jest pole trapezu?



Wymaganie ogólne: III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe: 11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

2) oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych.

Przy rozwiązaniu tego zadania również niezbędne jest geometryczne doświadczenie ucznia. Jeśli spotkał się on tylko z obliczaniem pól figur z zastosowaniem wzorów, będzie miał kłopot – zabraknie mu wysokości trójkąta i porzuci zadanie lub samodzielnie ustali (zmierzy) jej długość, co nie doprowadzi go do dobrego lub dokładnego wyniku. Jeśli natomiast uczeń ma dobrze przyswojone pojęcie pola – mierzył pola figur różnymi jednostkami (kwadratami, trójkątami itp.), ćwiczył układanie znanych figur w inną figurę lub rozcinanie figury na znane figury, łatwo zauważył, że pole trapezu to suma pól trzech trójkątów. Dla takich uczniów zadanie było banalnie proste.

Schemat oceniania

UWAGA: Przy ocenianiu należy brać pod uwagę także wymiary i obliczenia zapisane przez ucznia na rysunku lub obok rysunku.

1 punkt

kod 1.1 Poprawny wynik: 30 (z jednostką lub bez jednostki lub z błędnie podaną jednostką). Rachunki typu $10 \cdot 3 = 30$, $10 + 10 + 10 = 30$ lub bez wykonywania rachunków. Odpowiedź może być podana lub nie.

0 punktów

kod 0.1 Uczeń zapisuje działanie 3 · 10 lub 10 + 10 + 10 (z jednostką lub bez), ale dalszy ciąg rozwiązania jest niepoprawny i wynik jest inny niż 30. Na przykład:

- 3 · 10 cm^2 = 3 · 10 cm · 10 cm = 3 · 100 cm = 300 cm
- 10 cm^2 · 3 = 10 cm · 9 = 90 cm
- 10 cm^2 · 3 = 20 cm · 3 = 60 cm
- 3 · 10 cm^2 = 30 cm · 30 cm = 900 cm
- 3 · 10 cm^2 = 30 cm^2
  30 cm^2 · 3 = 90 cm^2
  Odp. Pole trapezu jest równe 90 cm^2.
- *a* + *b* + *c* = 10 cm^2 + 10 cm^2 + 10 cm^2 = 20 cm + 20 cm + 20 cm = 60 cm

kod 0.2 Uczeń tak dopasowuje wymiary trójkąta, aby jego pole było równe 10 cm^2 (ale trójkąt o podanych wymiarach nie jest równoboczny), oblicza pole trapezu korzystając ze wzoru na pole trapezu i otrzymuje wynik równy 30. Na przykład:

- Trójkąt: *a* = 5, *h* = 4, P = $\frac{5\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}=10.$

  Trapez: *a* = 10, *b* = 5, *h* = 4, P = $\frac{(10+5)\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}=30.$

- *Na rysunku zaznaczone i podpisane wymiary trójkąta a* = 10, *h* = 2.

  P = $\frac{(20+10)}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}=30.$

kod 0.3 Uczeń próbuje dopasować wymiary trójkąta i obliczyć pole trapezu korzystając ze wzoru na pole trapezu, jednak wynik jest inny niż 30. Na przykład:

- *Na rysunku zaznaczone wymiary trójkąta a* = 5, *h* = 5.

  Trapez: *a* = 10, *b* = 5, *h* = 5, P = $\frac{(10+5)}{2}\cdot 5=\frac{75}{2}=37\frac{1}{2}.$

- *Na rysunku zaznaczone wymiary trójkąta a* = 5, *h* = 4.

  $P_{trójkąta}$ = $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10,$ $P_{trapezu}$ = $\frac{1}{2}(10+4)\cdot 5=35.$

kod 0.4 Uczeń próbuje obliczyć pole korzystając z jakiegoś wzoru (wzór jest zapisany i niekoniecznie musi to być wzór na pole). Na przykład:

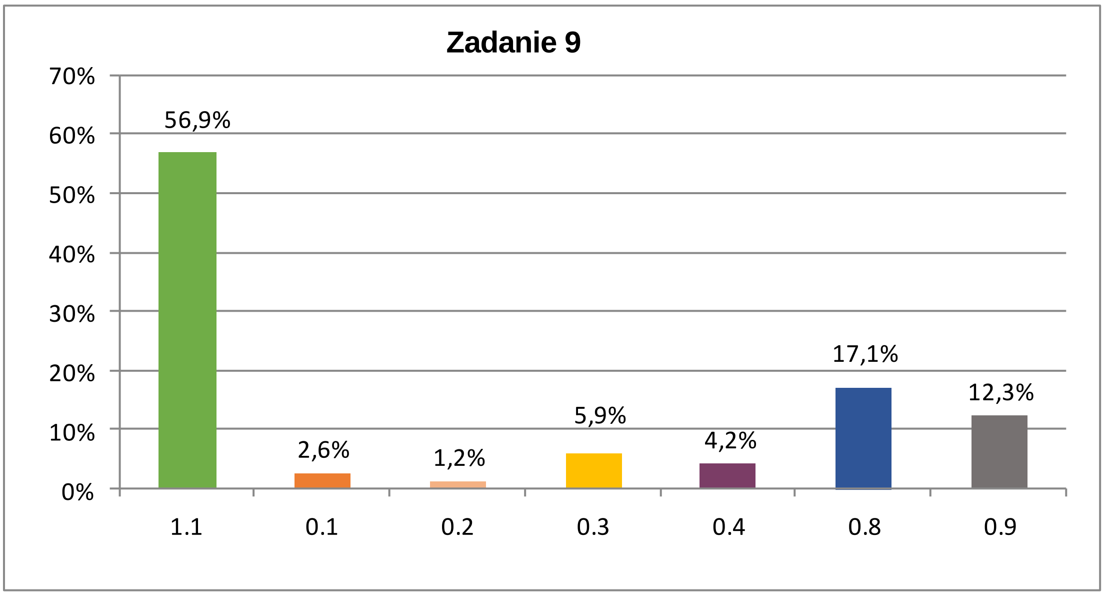
- *Zapisany wzór na pole trapezu, brak dalszego rozwiązania.*
- P = *a* · *a* = 5 · 10 = 50
- P = 2*a* + 2*b* = 2 · 10 + 2 · 10 = 20 + 20 = 40 cm^2
- P = a^3 = 10 · 10 · 10 = 1000 cm^2

kod 0.8 Inne błędne rozwiązania. Na przykład:

- 10 : 3 = 3,33… 3,3 · 5 = 16,5 cm (*pole pomylone z obwodem*)
- 10 cm^2 = 10 cm · 10 cm = 100 cm
  Odp. Pole trapezu wynosi 100 cm.
- P = $\frac{a \cdot h}{2}$,
  30 : 3 = 10 10 : 2 = 5 5 · 3 = 15
  Odp. Pole trapezu to 15 cm^2.
  (*uczeń zapisuje wzór na pole trójkąta, ale w dalszym rozwiązaniu z niego nie korzysta, dlatego kod 0.8, a nie 0.4*)

kod 0.9 Opuszczenie zadania

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



- Zadanie zostało poprawnie rozwiązane przez 57% uczniów (kod 1.1). Ponieważ jest to zadanie jednopunktowe, więc jego łatwość wynosiła 57%.

- Kolejne 3% uczniów wiedziało, że aby je rozwiązać wystarczy pomnożyć pole trójkąta przez 3 lub dodać do siebie pola trzech trójkątów (kod 0.1). Ale okazało się, że nie potrafili tego zrobić poprawnie. Popełniali różne błędy – przykłady podano w schemacie oceniania dla kodu 0.1. Przyczyną błędów najczęściej był brak zrozumienia jednostek pola – tu cm^2. Kwadrat, który stoi przy jednostce, „odrywał się” od niej i skłaniał uczniów do wykonywania dodatkowych, niepotrzebnych działań, na przykład podnoszenia do kwadratu liczby 10.

Warto zauważyć, że uczniowie, którzy rozumieją, że pole figury, która składa się z innych figur jest sumą pól tych figur składowych, w zdecydowanej większości nie mają problemu z częścią obliczeniową zadania. Jedynie niewielka część tych uczniów ma potem trudności w operowaniu jednostkami pola lub ma trudności rachunkowe.

- Następne 7% uczniów nie potrafiło obliczyć pola tego trapezu inaczej, niż korzystając ze wzoru na pole trapezu. Aby jednak móc go wykorzystać, trzeba było znać długości boków i wysokość trapezu. Z tego powodu:

- 1% wszystkich uczniów dopasowało wymiary trójkąta tak, aby jego pole było równe 10 cm^2. Na tej podstawie ustalali oni wymiary trapezu. Obliczone w ten sposób pole trapezu było równe 30 cm^2. Jednak trójkąty o takich wymiarach nie były równoboczne, czyli nie spełniały warunków zadania (kod 0.2).

- 6% wszystkich uczniów przyjmowało jakieś wymiary trójkąta lub trapezu, jednak pola trójkątów o takich wymiarach nie były równe 10 cm^2, czyli również nie spełniały warunków zadania (kod 0.3).

- Kolejne 4% uczniów nie miało innego pomysłu na rozwiązanie zadania, niż skorzystanie z jakiegoś wzoru. Jednak nie pamiętali wzoru na pole trapezu lub nie potrafili go użyć (kod 0.4). Uczniowie z tej grupy przytaczali różne poznane wzory: na pole kwadratu, obwód prostokąta itd. Również sposób używania tych wzorów świadczy, że uczniowie ci zupełnie nie rozumieją ani wzoru, ani znaczenia występujących w nim liter.

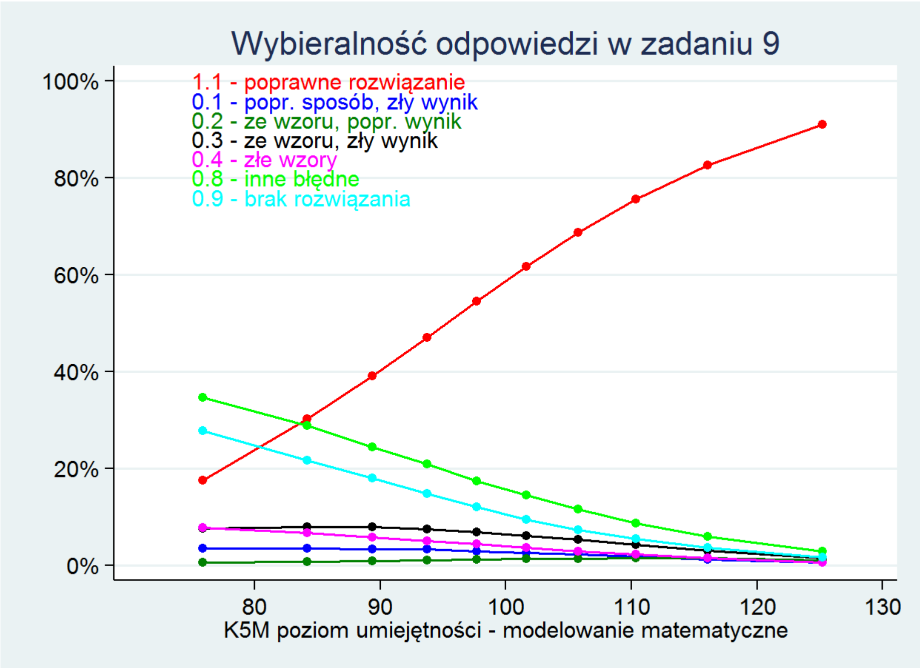
- 17% uczniów rozpoczęło rozwiązywanie zadania, ale popełniło inne błędy, niż opisane powyżej lub po prostu ograniczyło się do zapisania danych z zadania (kod 0.8).

- Ostatnia grupa – 12% uczniów – nie podjęła próby rozwiązania zadania (kod 0.9). To zadanie, inaczej niż to zwykle bywa w przypadku zadań otwartych, nie znajdowało się na końcu arkusza, lecz w środku. Pozwala to przypuszczać, że uczniowie, którzy je opuścili zrobili tak, ponieważ nie potrafili go rozwiązać, a nie dlatego, że zabrakło im czasu.

Wyniki uzyskane w tym zadaniu świadczą o tym, że tylko 60% uczniów V klasy rozumie pojęcie pola figury. Zdają oni sobie sprawę, że jeśli z kilku innych figur ułożymy nową figurę, to jej pole jest sumą pól części składowych.

Pozostałe 40% uczniów zupełnie nie potrafi posługiwać się pojęciem pola lub nie rozumie go i kojarzy je wyłącznie ze wzorami.

W zadaniu nie było różnic między wynikami dziewcząt i chłopców.



Wykres pokazuje, że wśród najsłabszych uczniów pojęcie pola jest należycie przyswojone przez zaledwie 20% uczniów, a wśród najlepszych potrafi się nim posługiwać 90% uczniów. Można zwrócić uwagę również na różnice w przebiegu linii różowej (kod 04 – „jakiś wzór”) i czarnej (kod 03 – „wzór na pole trapezu”). Pierwsza z nich szybciej opada – świadczy to o tym, że ten rodzaj błędu zdarza się raczej wśród słabych uczniów. Natomiast druga linia dłużej utrzymuje się na stałym poziomie. To z kolei pokazuje, że korzystanie ze wzoru na pole trapezu, mimo braku danych, zdarza się wśród uczniów o różnych poziomach umiejętności.

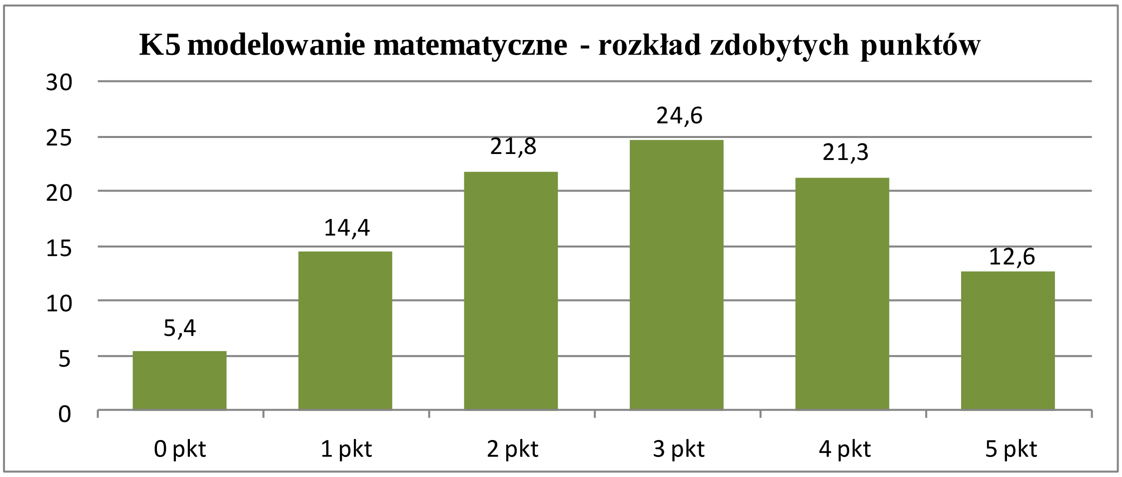
Rekomendacje

W nauczaniu geometrii, zarówno płaskiej, jak i przestrzennej w szkole podstawowej ważnym i często niedocenianym elementem pracy z uczniami jest operowanie realnymi obiektami. Polecamy zadania na mierzenie wymiarów i pól figur różnymi jednostkami, zadania na manipulowanie figurami na płaszczyźnie: rozcinanie figur, składanie figur. Obserwacje uczniów powinny dotyczyć wymiarów, obwodów i pól elementów składowych oraz powstałej figury. Bardzo przydatną pomocą dydaktyczną w kształtowaniu wyobraźni geometrycznej uczniów jest również prosty geoplan.

Bardziej szczegółowe rekomendacje zostały podane pod ostatnim omawianym zadaniem 6.

3.2.2. Modelowanie matematyczne – podsumowanie

W zadaniach sprawdzających umiejętność modelowania matematycznego uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 5 punktów. Wykres poniżej pokazuje rozkład uzyskanych punktów.



W obszarze modelowanie matematyczne uczniowie zdobyli średnio 2,80 punktu, czyli 56% punktów możliwych do uzyskania.

Z wykresu wynika, że tylko co dwudziesty uczeń biorący udział w badaniu nie uzyskał w tym obszarze ani jednego punktu, a co ósmy otrzymał wszystkie możliwe punkty. Nieco ponad 40% uczniów zdobyło w obszarze modelowania matematycznego mniej niż połowę punktów, a prawie 60% więcej niż połowę.

Żadne zadanie z tego obszaru nie było bardzo trudne dla uczniów – odsetki poprawnych odpowiedzi wynosiły od 43% – w zadaniu o rozcinaniu kwadratu na prostokąty, do 76% – w zadaniu o przygotowywaniu mniejszej porcji lemoniady według podanego przepisu. To ostatnie zadanie było dla uczniów najłatwiejsze z całego zestawu.

Ze sposobów rozwiązań zadań i popełnianych błędów wynika, że część uczniów ma problemy z odpowiednim użyciem porównywania różnicowego i ilorazowego oraz z właściwym modelowaniem relacji, a w szczególności z odwracaniem ich. Nadal duża część uczniów nie radzi sobie wystarczająco dobrze z pojęciem pola figury – nie rozumie go na poziomie intuicji, ucieka w niepotrzebne używanie wzorów, myli z obwodem.

W zadaniach sprawdzających umiejętność modelowania matematycznego średnio nie ma różnic między dziewczynkami i chłopcami – w czterech zadaniach nie było różnicy w wynikach, a tylko jedno zadanie znacznie lepiej rozwiązali chłopcy.

3.2.3. Modelowanie matematyczne – rekomendacje

Pod hasłem modelowanie matematyczne w szkole podstawowej kryje się dobór odpowiedniego modelu matematycznego do prostej sytuacji, stosowanie poznanych wzorów i zależności oraz przetwarzanie tekstu zadania na działania arytmetyczne i proste równania. Uczeń stawia pierwsze kroki na tym polu, więc ogromną rolę odgrywa dobór i kolejność zadań, w których dopasowuje znany model do nieskomplikowanej sytuacji, czy wykonuje prostą matematyzację sytuacji opisanej w zadaniu.

Każdy doświadczony nauczyciel ma zgromadzony zasób zadań, które używa w swojej pracy. Warto im się przyjrzeć i ocenić, czy są one różnorodne i ciekawe dla ucznia. Proponujemy zwrócić uwagę, czy są wśród nich zadania o bardziej złożonej formie, gdzie informacje przedstawione są w różny sposób – w tekstach, tabelach, diagramach – na przykład tak, jak w zadaniu o uczniach klasy 5a, czy w zadaniu o przygotowywaniu lemoniady. W rozwiązaniu takich zadań odpowiednie zestawienie informacji i ustalenie zależności między nimi warunkuje prawidłowy dobór modelu matematycznego. Warto przyjrzeć się również, czy zadania są osadzone w kontekstach praktycznych. Stosowanie kontekstów bliskich uczniom ułatwia porządkowanie informacji, rozumienie celowości obliczeń i pomaga w doborze modelu.

Podczas rozwiązywania zadań należy zwracać uwagę na różne sposoby prezentowania przez uczniów danych i wyróżniać te, które pokazują związki pomiędzy informacjami. Ważne jest również, aby wszyscy uczniowie mogli zaprezentować wybrany przez siebie model. Buduje to u nich przekonanie, że większość zadań można rozwiązać na różne sposoby.

Zachęcamy także do proponowania uczniom zadań nietypowych. Podejmowanie się rozwiązania takich zadań daje okazję do pokazania, że zasady logicznego, matematycznego postępowania można zastosować także w sytuacjach, z którymi uczniowie wcześniej się nie spotkali. Ponadto nabierają oni śmiałości, że również w sytuacjach nietypowych są w stanie sobie poradzić.

Również wśród zadań geometrycznych proponowanych uczniom podczas lekcji powinny być zadanie nietypowe. Prócz standardowych ćwiczeń typu „Oblicz obwód…”, „Oblicz pole …”, których nie da się pominąć, należy proponować uczniom na przykład zadania, w których trzeba rozciąć figurę i obliczyć pole lub obwód otrzymanych części (jak w zadaniu o rozciętym kwadracie). Lub ułożyć nową figurę z podanych figur i zastanowić się, jakie jest jej pole i obwód w porównaniu do pól i obwodów części składowych (jak w zadaniu o trapezie złożonym z trzech trójkątów).

Dobrym wstępem do rozwiązywania takich zadań są ćwiczenia manualne – rozcinanie nożycami figury na części lub składanie figur z przygotowanych części. Takie ćwiczenia i zadania kształtują u uczniów pojęcie pola i obwodu – pomagają intuicyjnie rozróżniać, że przy podziale figury na części jej pole też dzielone jest na części, natomiast obwód nie.

Analogiczne sugestie dotyczą figur przestrzennych, przy omawianiu których nie należy zapomnieć o rozcinaniu prostopadłościanu na części i składaniu nowych brył z prostopadłościanów i sześcianów.

3.3. Wymaganie ogólne: rozumowanie i tworzenie strategii

3.3.1. Omówienie wyników

„Uczeń prowadzi proste rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków, ustala kolejność czynności (w tym obliczeń) prowadzących do rozwiązania problemu, potrafi wyciągnąć wnioski z kilku informacji podanych w różnej postaci.”

Na poziomie szkoły podstawowej nie można oczekiwać od uczniów rozumowań zbyt złożonych. Także strategia rozwiązania zadania, którą może stworzyć uczeń na tym etapie edukacyjnym sprowadza się do zaplanowania i wykonania kilku prostych kroków.

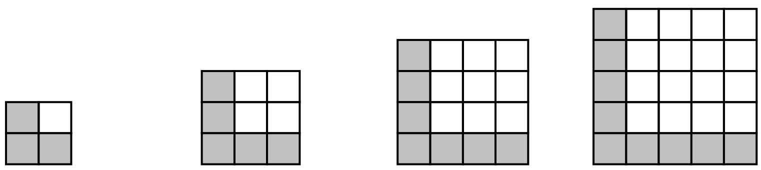
Różnica pomiędzy typowymi ćwiczeniami, a zadaniami opartymi na rozumowaniu i budowaniu strategii polega na tym, że w pierwszym przypadku wymagają one od ucznia przypomnienia znanych, przećwiczonych sposobów postępowania i ich zastosowania. W drugim przypadku wymagamy od ucznia najpierw analizy nietypowej dla niego sytuacji opisanej w zadaniu, następnie wymyślenia drogi dojścia do rozwiązania i ustalenia kolejnych kroków postępowania, a dopiero na koniec wykonania tych kroków.

Rozumowanie i tworzenie strategii to umiejętności, które na każdym etapie nauczania sprawiają uczniom trudność, ponieważ oprócz dobrej znajomości narzędzi matematycznych, wymagają także dobrego, intuicyjnego rozumienia używanych narzędzi, pojęć i zależności.

Umiejętności zawarte w tym obszarze sprawdzane były przez pięć zadań z zestawu – zadania 7, 10, 11, 12 i 13.

Zadanie 7 **(0-1)** **IV**

Kasia cieniuje niektóre kratki w kwadratach w taki sposób jak na rysunkach.



kwadrat 2×2 kwadrat 3×3 kwadrat 4×4 kwadrat 5×5

Zacieniowała w ten sposób również kratki w kwadracie 20×20.

Ile kratek Kasia zacieniowała w tym kwadracie?

A. 38 **B.*** 39 **C.** 40 **D.** 41 **E.** 42

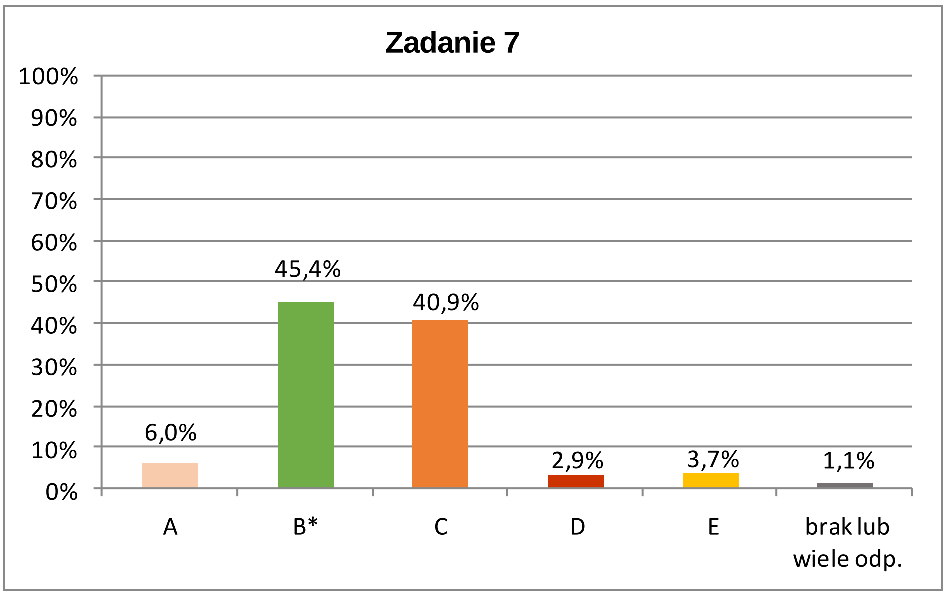
Wymagania ogólne: IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe: 14. Zadania tekstowe. Uczeń:

3) dostrzega zależności między podanymi informacjami.

Do poprawnego rozwiązania zadania potrzebna jest umiejętność starannego przeanalizowania i zrozumienia zależności liczby zamalowanych kratek od długości boku kwadratu. Analiza ucznia może przebiegać na przykład tak: jeśli zamaluję wszystkie kratki przy jednym boku, to na drugim sąsiednim boku jedna kratka będzie już zamalowana. Czyli na tym drugim boku muszę zamalować o 1 kratkę mniej.

Oczywiście można też po prostu narysować kwadrat o wymiarach 20 $\times$ 20, a następnie zamalować i policzyć odpowiednie kratki. W ten sposób również otrzyma się poprawne rozwiązanie, ale zajmie to więcej czasu i można pomylić się w rachowaniu kratek.



Zadanie zostało rozwiązane poprawnie przez 45,4% uczniów.

Kolejne 40,9% uczniów wybrało odpowiedź C. Podwoili oni długość boku kwadratu, ale nie dostrzegli, że jedna kratka jest wspólna dla obu boków, czyli nie dokonali starannej analizy przedstawionej na rysunkach zależności.

Pozostałe trzy możliwe odpowiedzi były wybierane przez bardzo niewielkie odsetki uczniów.

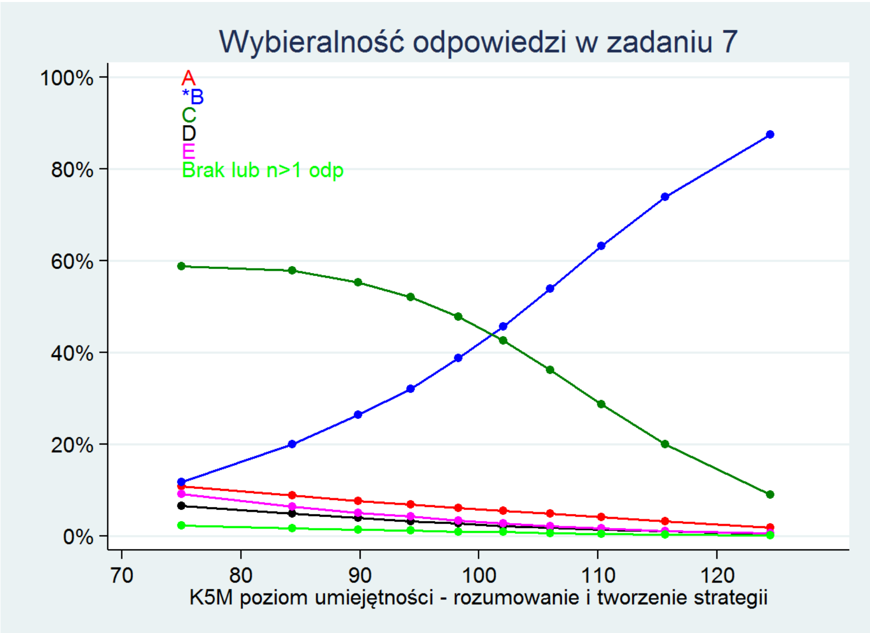
Niektórzy uczniowie dostrzegli szczególną rolę narożnej kratki, ale w związku z tym dodali 1, zamiast odjąć – ci uczniowie podali odpowiedź D.

Kolejne 6% uczniów zauważyło, że trzeba odjąć 1 kratkę, ale odjęło ją od każdego boku zamiast od sumy – ci uczniowie otrzymali odpowiedź A.

Ostatnia grupa to uczniowie, którzy dodali 1 kratkę do każdego boku, a następnie obliczyli sumę. Ci uczniowie otrzymali odpowiedź E.

Nie można także wykluczyć, że część uczniów wskazujących te nietypowe odpowiedzi A, D lub E po prostu „strzelała”.

W tym zadaniu nie było różnic między wynikami osiąganymi przez dziewczęta i chłopców.



Wykres potwierdza, że zadanie bardzo dobrze sprawdza umiejętność rozumowania i tworzenia strategii rozwiązania – uczniowie, którzy we wszystkich zadaniach z tego obszaru uzyskiwali najniższe wyniki, w tym zadaniu również bardzo rzadko wybierali poprawną odpowiedź (około 10-15%). Natomiast ci, którzy w innych zadaniach radzili sobie bardzo dobrze, w tym zadaniu również wybierali poprawną odpowiedź (około 85-90%).

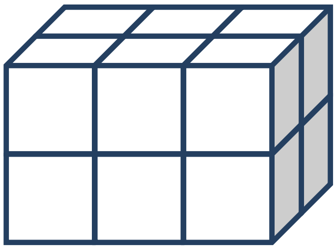
Wykres pokazuje, że uczniowie słabi zdecydowanie najczęściej wybierali odpowiedź C (około 60%) oraz, że również wśród uczniów najlepszych część osób wybiera tę odpowiedź (około 10%).

Rekomendacje

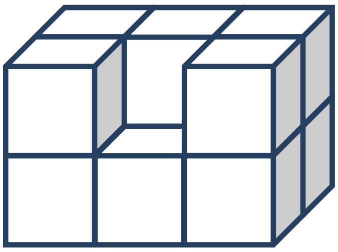
Dostrzeganie zależności między różnymi wielkościami jest umiejętnością, która może być doskonalona poprzez rozwiązywanie wielu różnych zadań – dotyczących proporcji, zależności między długością boku kwadratu, a jego obwodem, czy zadań geometrycznych podobnych do opisanego wyżej. Także omawiane wcześniej zadanie 6 o rozcinaniu kwadratu na prostokąty i rekomendowane ćwiczenia zamieszczone pod tym zadaniem są związane z dostrzeganiem zależności między różnymi wielkościami. Polecamy również układanie przez uczniów własnych zadań, które będą traktowali jak zagadki - łamigłówki. Po omówieniu w klasie takich zadań można zachęcić uczniów do modyfikacji zadań kolegów. Taki rodzaj pracy stwarza również szanse na pobudzenie aktywności wszystkich uczniów.

Zadanie 10 (0-2) IV

Bartek zbudował prostopadłościan z 12 sześciennych klocków.



Następnie usunął jeden klocek i otrzymał bryłę przedstawioną na rysunku poniżej.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Nowa bryła ma mniejszą objętość niż początkowy prostopadłościan.	P*	F
Nowa bryła ma mniejsze pole powierzchni niż początkowy prostopadłościan.	P	F*

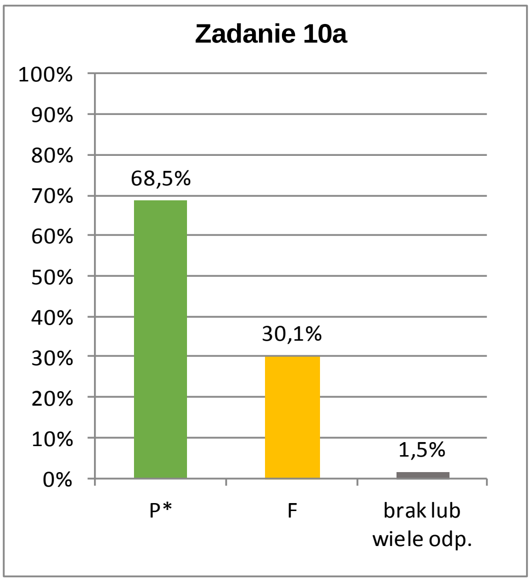
Wymagania ogólne: IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

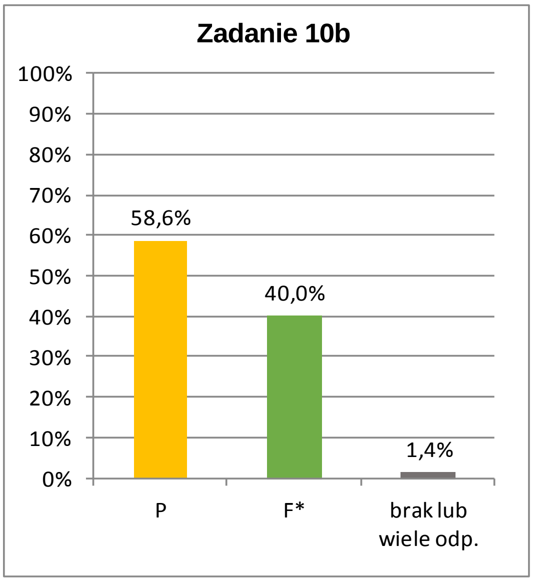
Wymagania szczegółowe: 14. Zadania tekstowe. Uczeń:

5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.

Było to jedyne zadanie zamknięte, za które uczeń mógł otrzymać 2 punkty – po 1 za poprawne rozwiązanie każdej części.

Do rozwiązanie tego zadania nie były potrzebne żadne rachunki, tylko rozumienie pojęć: objętość i pole powierzchni oraz umiejętność rozumowania.





Średnio za całe zadanie uczniowie otrzymali 1,08 punktu – jego łatwość wynosiła zatem 54%.

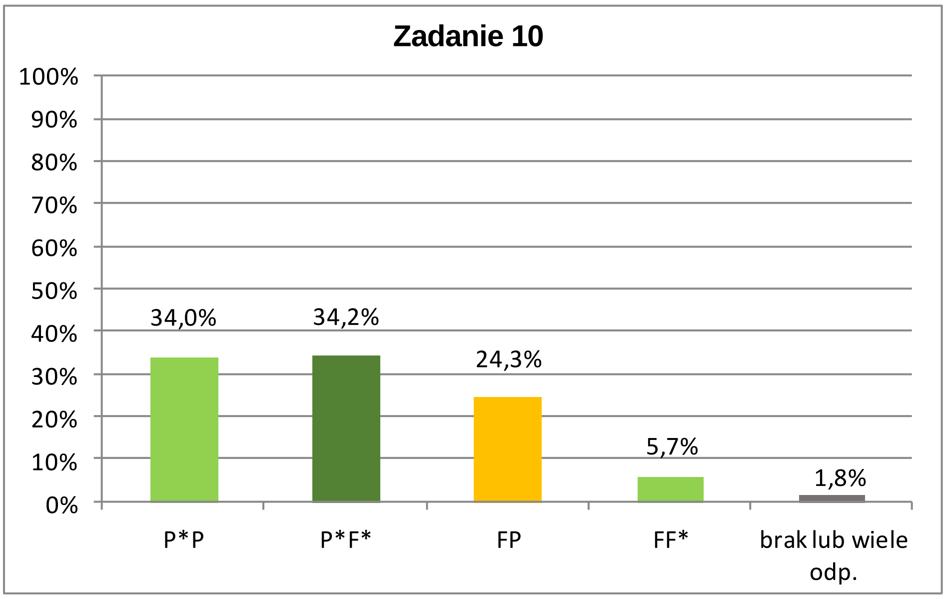
Pierwszą część zadania dotyczącą objętości powstałej bryły poprawnie rozwiązało 68,5% uczniów. Oznacza to, że mają oni poprawnie ukształtowane rozumienie pojęcia objętości – wiedzą, że aby ocenić, czy objętość się zmieniła i jak, nie muszą stosować żadnych wzorów ani wykonywać obliczeń. Widzą związek między dokładaniem lub usuwaniem części składowych, a objętością powstałej bryły.

Niestety, co trzeci uczeń V klasy nie rozumie pojęcia objętości na poziomie intuicyjnym. Istnieje ryzyko, że kiedy w programie klasy VI pojawią się wzory na obliczanie objętości brył, ci uczniowie zaczną je stosować bez zrozumienia – bezrefleksyjnie i algorytmicznie – nie wiedząc, co właściwie obliczają.

Druga część zadania z natury swojej była trudniejsza niż pierwsza, ponieważ nie wystarczyła sama znajomość używanego pojęcia i jego rozumienie – trzeba też było wykonać pewne rozumowanie. Uczeń V klasy nie ma jeszcze do dyspozycji żadnych wzorów, którymi może się posłużyć, dlatego aby móc ocenić, jak zmieniło się pole powierzchni bryły, musi zauważyć, że wystarczy przeanalizować, jak zmienia się liczba kwadratów składających się na powierzchnię bryły. Po usunięciu kostki położonej tak, jak pokazano na rysunku, znikły dwa wcześniej istniejące kwadraty, ale pojawiły się cztery nowe. Zatem nowa bryła ma większe pole powierzchni całkowitej niż prostopadłościan, z którego powstała.

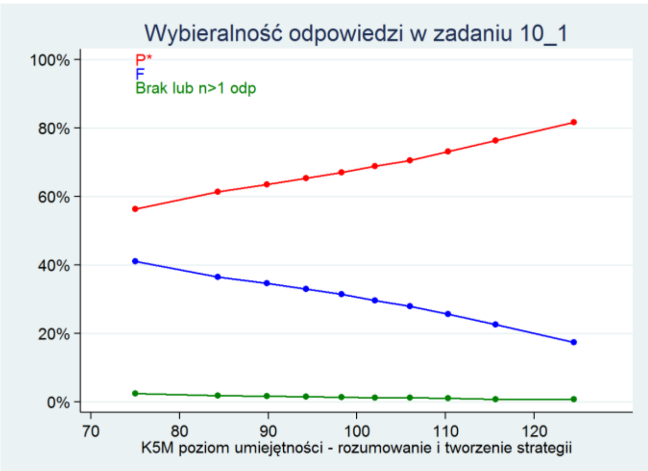
Tę część zadania poprawnie rozwiązało 40% uczniów. Nie jest to wcale mało, zważywszy, że pojęcie pola powierzchni bryły może nie być znane części uczniów V klasy i w takiej sytuacji muszą się posługiwać analogią do pola figury płaskiej. Również rozumowanie, które trzeba wykorzystać dla rozwiązania tego zadania nie jest proste i typowe.

W rozwiązaniu tego zadania również nie było różnic między dziewczętami i chłopcami.

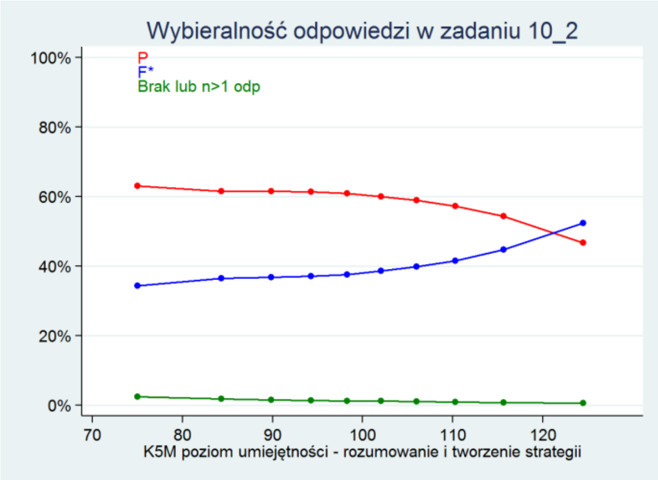


Okazuje się, że z grupy 68% uczniów, którzy poprawnie rozwiązali pierwszą część zadania – odpowiedź P – dokładnie połowa poprawnie rozwiązała również drugą część zadania – odpowiedź PF – 34%. Druga połowa tych uczniów drugą część rozwiązała źle – odpowiedź PP – 34%. Wydaje się zatem, że rozumienie pojęcia objętości nie gwarantuje poradzenia sobie z rozumowaniem dotyczącym pola powierzchni.

Natomiast wśród uczniów, którzy poprawnie rozwiązali drugą część zadania – odpowiedź F – 40%, znaczna większość poprawnie rozwiązała również pierwszą część – odpowiedź PF – 34%. Tylko co siódmy uczeń z tej grupy nie poradził sobie z pierwszą częścią zadania – odpowiedzi FF – 5,7%. Okazuje się zatem, że przeprowadzenie rozumowania dotyczącego pola powierzchni jest łatwiejsze dla tych uczniów, którzy mają poprawnie ukształtowane rozumienie pojęcia objętości.



Wykres pokazuje, że właściwe rozumienie pojęcia objętości jest stosunkowo mało związane z umiejętnością rozumowania i tworzenia strategii, sprawdzaną przez tę grupę zadań – różnica między częstością wybierania poprawnej odpowiedzi przez uczniów słabych i uczniów dobrych jest stosunkowo niewielka.



W drugiej części zadania dotyczącej pola powierzchni opisana powyżej zależność jest jeszcze mniejsza – niebieska linia pokazująca częstość wybierania poprawnej odpowiedzi jest prawie pozioma.

Rekomendacje

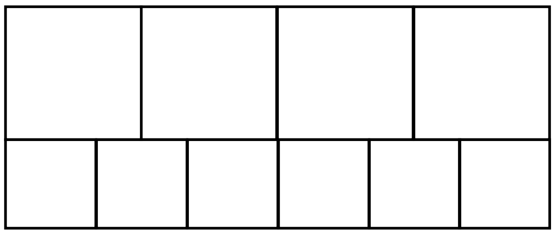
Takie zadania są bardzo trudne dla uczniów bez doświadczenia w manipulowaniu figurami. Jeśli natomiast uczeń bawił się figurami, choćby na płaszczyźnie, na przykład usuwał kwadrat z brzegu prostokąta i porównywał pole i obwód powstałej figury z pole i obwodem prostokąta, z którego ta figura powstała, ma dobrą podbudowę do rozwiązania zadania. Dla takich uczniów łatwiejsze będzie zbudowanie w wyobraźni bryły oraz obserwacja pola i objętości figury powstałej w wyniku usunięcia jej fragmentu.

Dlatego należy stwarzać uczniom, zwłaszcza szkoły podstawowej, wiele okazji do manipulowania bryłami, budowania nowych brył z sześcianów lub innych „klocków", dzielenia brył na sześciany, prostopadłościany, odcinanie fragmentów brył. Przy tych doświadczeniach nauczyciel może obserwować, jak uczniowie widzą zmiany pola i objętości brył, jak wnioskują, jak dostrzegają zależności, jak argumentują.

Zadanie 11 (0-3) IV

Z dużych i małych kwadratów ułożono prostokąt tak, jak przedstawiono na rysunku.
Bok dużego kwadratu ma 15 cm.

Jakie wymiary ma ułożony prostokąt?



Wymagania ogólne: IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe: 14. Zadania tekstowe. Uczeń:

4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania.

Aby rozwiązać zadanie należało zauważyć, że na jeden bok prostokąta składają się cztery boki dużego kwadratu, a na drugi – bok dużego i bok małego kwadratu. Obliczenie długości dłuższego boku nie powinno być dla uczniów problemem. Trudność zadania tkwiła w tym, że aby obliczyć długość boku małego kwadratu, uczeń musiał zauważyć zależność pomiędzy długością boku dużego kwadratu i małego kwadratu.

Zadanie nie jest typowe. Z treści zadania uczeń dowiaduje się o długości boku dużego kwadratu. Natomiast zależności między długościami istotnych odcinków odczytuje z rysunku. Utworzenie logicznego ciągu kilku operacji, wykorzystującego informacje dane w zadaniu i prowadzącego do rozwiązania, jest czynnością trudną i wymagającą pewnego doświadczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

Dłuższy bok prostokąta: 4 · 15 cm = 60 cm

Bok małego kwadratu: 60 cm : 6 = 10 cm

Krótszy bok prostokąta: 15 cm + 10 cm = 25 cm

Odp. Wymiary prostokąta to 60 cm × 25 cm.

Schemat oceniania

UWAGA: Przy ocenianiu należy brać pod uwagę także wymiary figur i obliczenia zapisane przez ucznia na rysunku lub obok rysunku.

3 punkty

kod 3.1. Poprawne wymiary: 60 × 25 (z jednostką lub bez, odpowiedź podana lub nie).

2 punkty

kod 2.1. <u>Poprawna metoda</u> obliczenia obu wymiarów prostokąta <u>z błędami rachunkowymi</u>

kod 2.2. Poprawne wyznaczenie <u>boku małego kwadratu (10 cm)</u>, brak dalszego ciągu rozwiązania lub dalszy ciąg rozwiązania jest błędny (błąd inny niż rachunkowy)

kod 2.3. Błędne wyznaczenie dłuższego boku prostokąta (błąd inny niż rachunkowy) i konsekwentnie <u>poprawnie obliczona długość boku małego kwadratu i drugi bok prostokąta</u>

1 punkt

kod 1.1. Poprawne obliczenie <u>dłuższego boku prostokąta (60 cm</u>), brak dalszych obliczeń lub dalsze obliczenia są błędne

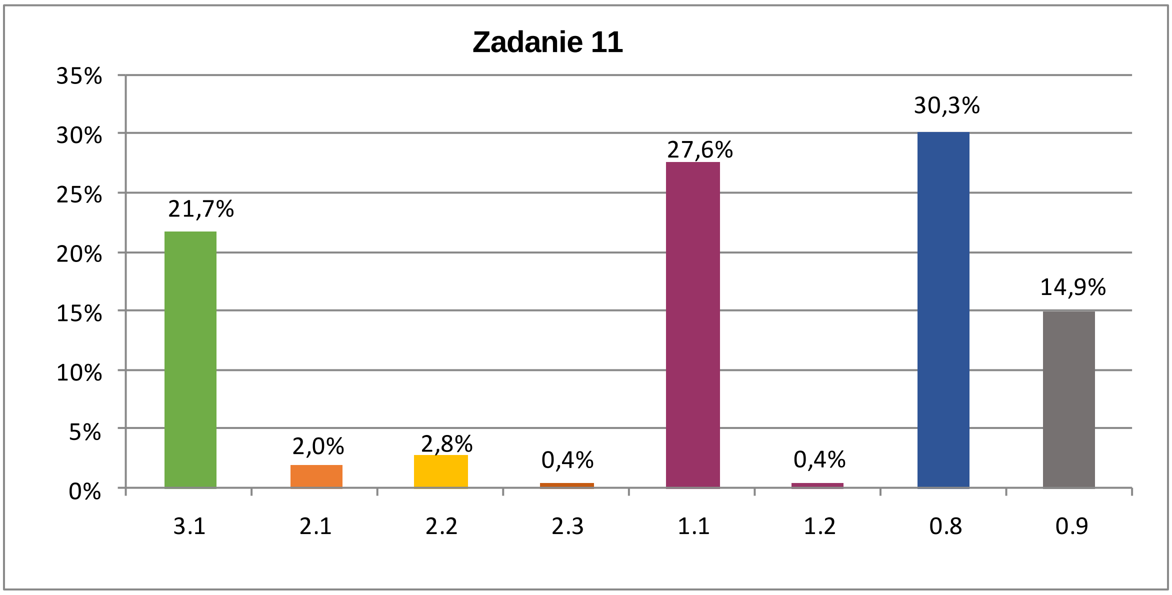
kod 1.2. Błędne wyznaczenie dłuższego boku prostokąta i konsekwentnie <u>poprawnie obliczona długość boku małego kwadratu</u>

0 punktów

kod 0.8. Inne błędne rozwiązania

kod 0.9. Opuszczenie zadania

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



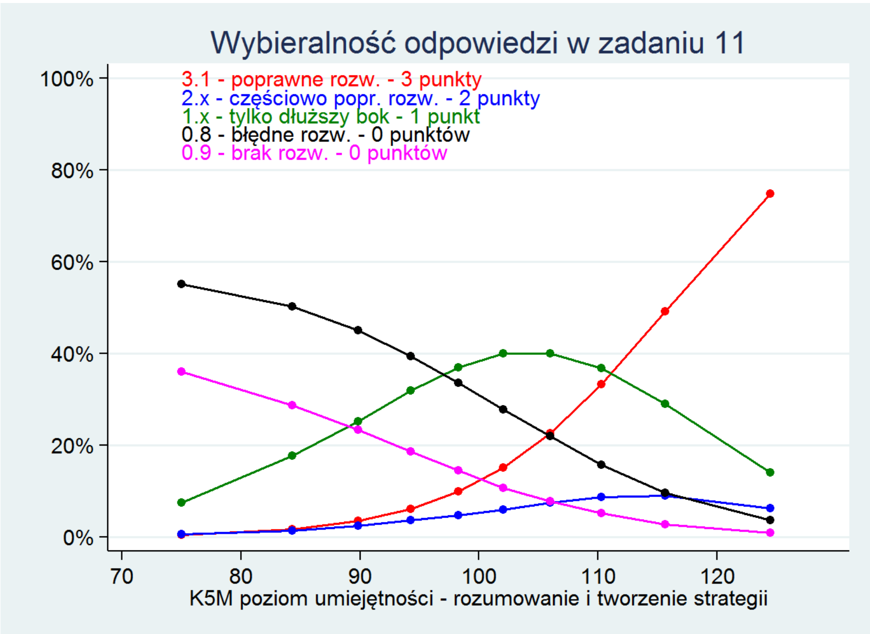
Średnio za to zadanie uczniowie otrzymali 1,03 punktu – jego łatwość wynosiła zatem 34%. Było to najtrudniejsze zadanie otwarte.

- Zadanie zostało poprawnie rozwiązane tylko przez 22% uczniów (kod 3.1). Uzyskali oni za swoje rozwiązanie 3 punkty.
- Rozwiązania za 2 punkty przedstawiło zaledwie 5% uczniów. Wśród nich:
  - 2% uczniów wiedziało, jak rozwiązać zadanie, ale popełnili błędy rachunkowe (kod 2.1),
  - 3% uczniów pokonało główną trudność zadania, czyli obliczyli oni długość boku małego kwadratu, ale w dalszej części rozwiązania popełnili błąd (inny niż rachunkowy) lub po prostu nie dokończyli rozwiązania (kod 2.2),
  - bardzo niewielki odsetek uczniów (mniej niż 1%) rozpoczął zadanie od błędnego obliczenia dłuższego boku prostokąta (błąd był inny niż rachunkowy), ale dalsze kroki rozwiązania były poprawne (kod 2.3).
- 1 punkt za rozwiązanie tego zadania otrzymało 28% uczniów. I tak:
  - prawie wszyscy wśród nich obliczyli tylko długość dłuższego boku prostokąta, czyli wykonali oni tylko pierwszy krok na drodze do pełnego rozwiązania zadania (kod 1.1),
  - bardzo niewielu spośród nich (mniej niż 1% wszystkich badanych) obliczyło długość boku małego kwadratu, ale skorzystali przy tym z niepoprawnie wyznaczonej długości boku prostokąta oraz nie doprowadzili rozwiązania do końca (kod 1.2).

- Pozostałe 45% uczniów nie uzyskało za to zadanie żadnego punktu. Wśród nich:
    - 30% przedstawiło błędne rozwiązanie (kod 0.8),
    - 15% nie przedstawiło żadnego rozwiązania, czyli opuściło zadanie (kod 0.9).

Dziwne wydaje się, że tak trudne okazało się dla uczniów wykonanie choćby pierwszego kroku, czyli obliczenie dłuższego boku prostokąta (rozwiązanie za 1 punkt). Aby to zrobić nie są potrzebne żadne złożone umiejętności, wystarczy połączyć informację o długości boku dużego kwadratu, podaną w tekście zadania z rysunkiem, na którym widać, że dłuższy bok prostokąta tworzą 4 takie kwadraty. Dlaczego aż 45% uczniów nie potrafiło tego zauważyć?

Podobnie jak we wcześniejszych zadaniach z tego obszaru, w tym zadaniu również nie ma różnic między wynikami osiąganymi przez dziewczęta i chłopców.



Powyższy wykres potwierdza, że było to dla uczniów V klasy bardzo trudne zadanie – wśród uczniów najlepszych rozwiązało je tylko 3 na 4 uczniów, a spośród uczniów o średnim poziomie umiejętności zaledwie co 10. Dla uczniów słabych zadanie było zupełnie niewykonalne.

Rozwiązanie za 1 punkt, które powinno być widoczne dla większości uczniów, potrafiło przedstawić tylko niespełna 10% uczniów najsłabszych i około 40% uczniów o średnich umiejętnościach. Zaskakujące, że nawet wśród uczniów najlepszych, którzy w pozostałych zadaniach z tego obszaru otrzymywali bardzo wysokie wyniki, około 15% zdołało uzyskać tylko 1 punkt.

Kolejna rzecz, na którą warto zwrócić uwagę, to wyniki uzyskiwane przez uczniów o średnich umiejętnościach: około 10% z nich rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie, około 40% wykonało tylko pierwszy, najłatwiejszy krok rozwiązania zadania, a pozostali, czyli około 50% uczniów, nie potrafiło nawet rozpocząć rozwiązania. Jest to bardzo niepokojący sygnał, świadczący o tym, że rozumowania w obszarze geometrii są opanowane przez uczniów V klasy w dalece niewystarczającym stopniu.

Rekomendacje

Ponieważ uczniowie często są w stanie wykonać poprawnie pojedyncze kroki w rozwiązaniu zadania, ale nie potrafią tych kroków zaplanować, a następnie związać w całość, warto stawiać ich przed takimi wyzwaniami. Polecamy zadania, najpierw dwuetapowe, potem kilkuetapowe, odbiegające od rutynowych zadań ćwiczeniowych, które uczą analizy problemu, planowania i konsekwentnej realizacji planu rozwiązania.

Warto także tak zaplanować prace z tymi zadaniami, aby uczniowie mogli rozwiązać je sami, a następnie swoje rozwiązania przedstawili w klasie. Będzie to dobra okazja do poszukiwania własnych dróg rozwiązania, przedstawiania swojego rozumowania w sposób zrozumiały dla innych uczniów i nauczyciela, a także śledzenia toku rozumowania innych osób.

Zapewne przy tej okazji zdarzą się sytuacje, że rozwiązanie ucznia będzie niepoprawne. Warto te sytuacje wykorzystać do tego, aby to uczniowie przeprowadzili analizę przedstawionego rozwiązania i uzasadnili, dlaczego jest ono poprawne lub dlaczego nie. Bardzo ważne jest przy tym, aby uczniowie wiedzieli i czuli, że popełnianie błędów jest rzeczą normalną w rozwiązywaniu problemów i aby mieli świadomość, że najważniejsze jest podejmowanie prób szukania rozwiązania, nawet jeśli są one czasami nieudane lub jeśli znalezione rozwiązanie jest błędne.

Zadanie 12 (0-2) IV

Maja zerwała 8 koniczynek. Były wśród nich koniczynki czterolistne i trzylistne. Razem miały 26 listków.

Ile czterolistnych i ile trzylistnych koniczynek zerwała Maja?

Wymagania ogólne:	IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe:	14. Zadania tekstowe. Uczeń: 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody. 2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe, (…) 3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową (…).

Zadanie jest bardzo przyjazne dla uczniów – krótkie i zrozumiałe. Na pierwszy rzut oka wydaje się ono bardzo podobne do zwykłych zadań tekstowych rozwiązywanych już od I klasy szkoły podstawowej. Jednak szybko okazuje się, że typowe sposoby rozwiązania używane w takich przypadkach zawodzą, ponieważ w tym zadaniu uczeń musi znaleźć liczby, które będą spełniały jednocześnie dwa różne warunki. Na wyższych etapach kształcenia takie problemy rozwiązywane są za pomocą równania lub układu równań. Jednak w V klasie uczniowie nie dysponują jeszcze takimi narzędziami algebraicznymi. A nawet jeśli niektórzy je znają, to nie mają jeszcze wprawy w ich stosowaniu. Dlatego rozwiązanie zadania wymaga od nich zastosowania innego sposobu, na przykład polegającego na przeprowadzeniu analizy, jak liczba listków zależy od liczby koniczynek (I i III sposób rozwiązania przedstawiony poniżej). Innym sposobem rozwiązania jest systematyczne sprawdzanie różnych możliwości (II sposób rozwiązania przedstawiony poniżej). Można zastosować również klasyczną metodę prób i błędów, choć jest to oczywiście najmniej pożądany sposób rozwiązania tego zadania.

Przykładowe rozwiązania:

I sposób:

Gdyby Maja zerwała tylko czterolistne koniczynki, to miałyby one razem 8 · 4 = 32 listki – to o wiele za dużo.

Gdyby zerwała tylko trzylistne, to miałyby razem 8 · 3 = 24 listki – to tylko o 2 listki za mało.

Zamiana 1 koniczynki trzylistnej na 1 czterolistną zwiększa łączną liczbę listków o 1. Czyli trzeba zamienić 2 koniczynki trzylistne na 2 czterolistne – wtedy łączna liczba listków zwiększy się o 2.

Sprawdzenie: 6 koniczynek trzylistnych - 6 · 3 = 18

2 koniczynki czterolistne - 2 · 4 = 8

łącznie 8 koniczynek i 18 + 8 = 26 listków – zgadza się.

II sposób:

7 koniczynek czterolistnych i 1 trzylistna to 7 · 4 = 28 i 3, razem 31 listków – o wiele za dużo

5 czterolistnych i 3 trzylistne to 5 · 4 = 20 i 3 · 3 = 9, razem 29 listków – nadal za dużo

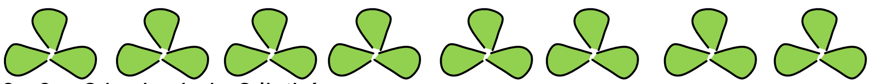
3 czterolistne i 5 trzylistnych to 3 · 4 = 12 i 5 · 3 = 15, razem 27 listków – za dużo, ale tylko o 1

2 czterolistne i 6 trzylistnych to 2 · 4 = 8 i 6 · 3 = 18, razem 26 listków – dobrze

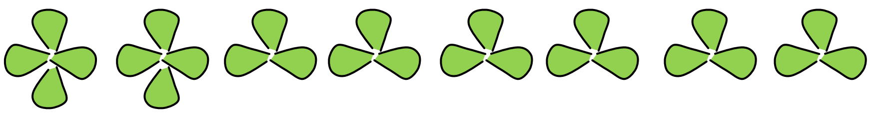
Pozostałych możliwości już nie warto sprawdzać, bo dalsze zmniejszanie liczby czterolistnych koniczynek spowoduje zmniejszenie łącznej liczby listków – i będzie ich za mało.

Odpowiedź: Maja zerwała 2 czterolistne i 6 trzylistnych koniczynek.

III sposób:



8 · 3 = 24 – brakuje 2 listków



Odpowiedź: Maja zerwała 2 koniczynki czterolistne i 6 trzylistnych.

Schemat oceniania

UWAGA: Przy ocenianiu należy brać pod uwagę także rysunkowy sposób rozwiązania zadania.

2 punkty

kod 2.1 – Poprawne rozwiązanie: **2** koniczynki czterolistne i **6** trzylistnych.

Ten kod przyznajemy także, gdy odpowiedź nie jest podana lub gdy uczeń popełnił błąd nieuwagi przy podawaniu odpowiedzi. Na przykład:

- $2 \cdot 4 = 8$ i $6 \cdot 3 = 18$, razem 26 listków
  Odp. Maja zerwała 2 koniczynki trzylistne i 6 czterolistnych.

1 punkt

kod 1.1 – Odpowiedź, dla której zgadza się łączna suma listków, ale nie zgadza się liczba koniczynek – najczęściej: **5** czterolistnych koniczynek i **2** trzylistne. Na przykład:

- $26 = 20 + 6$
  $26 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2$
  Odp. Maja zerwała 5 czterolistnych koniczynek i 2 trzylistne koniczynki.

- trzylistne: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27,
  czterolistne: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
  Odp. Maja zerwała 18 trzylistnych koniczynek i 8 czterolistnych.

kod 1.2 – Poprawny sposób rozwiązania i niepoprawna odpowiedź spowodowana błędem rachunkowym – z rachunków przeprowadzonych przez ucznia wynika, że razem jest 8 koniczynek i ich suma listków jest równa 26. Na przykład:

TRZYLISTNE:	2 – 6 listków	1 – 3 listki	3 – 6 listków
CZTEROLISTNE:	6 – 18 listków	7 – 28 listków	5 – 20 listków
	24 listki	31 listków	26 listków
	ŹLE	ŹLE	DOBRZE

  Odpowiedź: Maja zerwała 3 koniczynki trzylistne i 5 czterolistnych.

  (*Uczeń tak dobierał liczby koniczynek, żeby razem było ich 8 – pamiętał o tym warunku zadania. Przy sprawdzaniu łącznej liczby listków popełnił błąd rachunkowy – dlatego uzyskał liczbę 26.*)

kod 1.3 – Poprawnie ułożone równanie z błędnym lub niepełnym rozwiązaniem. Na przykład:

- $x \cdot 4 + (8 - x) \cdot 3 = 26$
  $4x + 24 - 3x = 26$
  $x = 2$

0 punktów

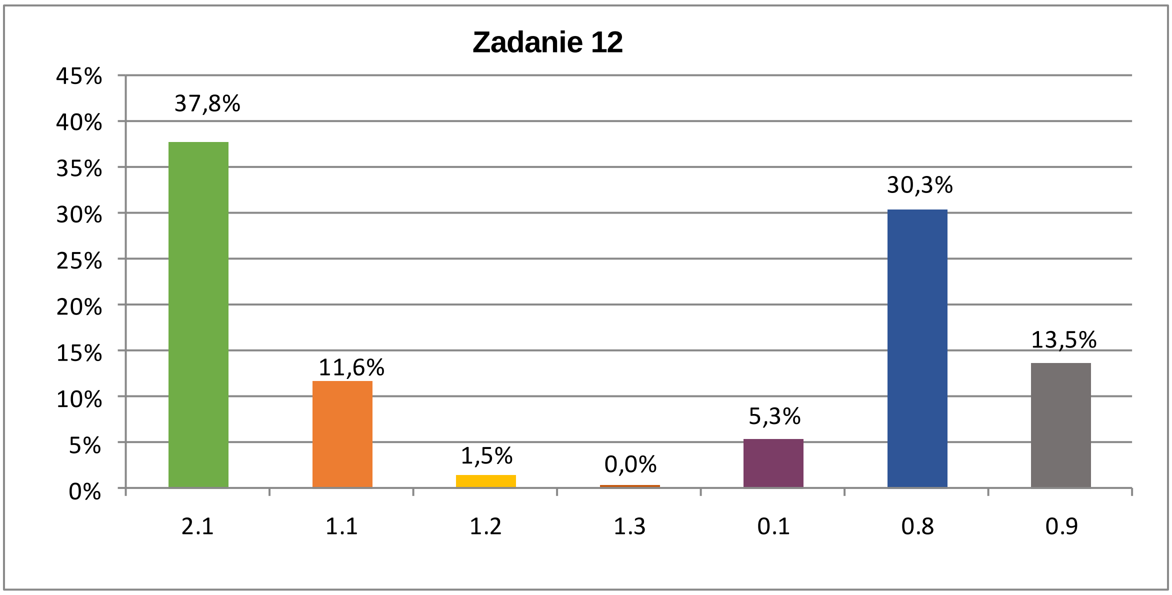
kod 0.1 – Błędna odpowiedź, w której zgadza się łączna liczba koniczynek (8), ale nie zgadza się suma listków. Na przykład:

- 4 trzylistne i 4 czterolistne

kod 0.8 – Inne błędne rozwiązania.

kod 0.9 – Opuszczenie zadania

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



Za to zadanie uczniowie otrzymali średnio 0,89 punktu – jego łatwość wynosiła zatem 44%.

Zadanie zostało poprawnie rozwiązane przez 37,8% uczniów. Potrafili oni podać rozwiązanie uwzględniające oba warunki podane w zadaniu (kod 2.1).

Kolejną dużą grupę uczniów (11,6%) stanowili ci, którzy skupili się na jednym warunku, trudniejszym do sprawdzenia, czyli łącznej liczbie listków, a zapomnieli o drugim warunku, znacznie prostszym do sprawdzenia – o liczbie koniczynek (kod 1.1).

Bardzo niewielu było uczniów (1,5%), którzy nie otrzymali poprawnej odpowiedzi tylko dlatego, że popełnili w rozwiązaniu błąd rachunkowy (kod 1.2).

Prawie nie było uczniów (0,04%), którzy ułożyli poprawne równanie lub układ równań opisujące sytuacje podaną w zadaniu, ale nie rozwiązali go lub rozwiązali je niepoprawnie (kod 1.3).

Stosunkowo niewielu było również uczniów (5,3%), którzy podali odpowiedź, która spełniała tylko jeden, łatwiejszy do sprawdzenia warunek zadania, czyli odpowiedź, w której zgadzała się tylko łączna liczba zerwanych koniczynek. Natomiast drugi warunek zadania dotyczący łącznej liczby listków nie był spełniony (kod 0.1).

Bardzo wielu uczniów (30,3%) przeczytało zadanie i podjęło próbę jego rozwiązania, ale albo rozwiązanie to było zupełnie błędne, albo uczniowie porzucili je, nie doszedłszy do żadnych rezultatów (kod 0.8).

I ostatnia grupa uczniów (13,5%) to ci, którzy w ogóle nie próbowali rozwiązać tego zadania.

Reasumując:

- 38% uczniów rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie i uzyskało 2 punkty,
- 13% uczniów rozwiązało zadanie częściowo poprawnie i uzyskało 1 punkt,

- pozostałe 49% uczniów nie rozwiązało zadania lub rozwiązało je błędnie i otrzymało 0 punktów.

Omawiane zadanie jest analogiczne do zadania o kupowaniu ramek do zdjęć rozwiązywanego przez uczniów klasy V podczas badania DUMa w maju 2014 roku (zadanie 13).

Rok wcześniej wyniki były znacznie słabsze:

- 28% uczniów rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie i uzyskało 2 punkty,
- 25% uczniów rozwiązało zadanie częściowo poprawnie i uzyskało 1 punkt,
- pozostałe 47% uczniów nie rozwiązało zadania lub rozwiązało je błędnie i otrzymało 0 punktów.

Jak widać, prawie nie zmienił się odsetek uczniów, którzy w ogóle nie potrafili rozwiązać zadania i otrzymali 0 punktów. Natomiast zasadnicza różnica polega na przesunięciu się około 10% uczniów z grupy tych, którzy rozwiązali zadanie częściowo poprawnie do grupy z całkowicie poprawnym rozwiązaniem. Ta część uczniów rok wcześniej otrzymała kod 1.1, czyli skoncentrowała się tylko na jednym, trudniejszym warunku zadania, zapominając o drugim, prostszym warunku.

Taka zmiana może być spowodowana tym, że tegoroczne zadanie było po prostu łatwiejsze, choć, gdyby tak było, to grupa uczniów, którzy otrzymali 0 punktów prawdopodobnie również by się zmniejszyła. A tak się nie stało.

Inną przyczyną tej zmiany może być to, że tego typu zadania pojawiły się na lekcjach. Ale tu znów pojawia się wątpliwość, czy w takim przypadku nie powinna zmniejszyć się grupa uczniów z wynikiem 0 punktów.

W omawianym zadaniu nie ma różnic między wynikami osiąganymi przez dziewczęta i chłopców.

W zadaniu 12 po wprowadzeniu do programu komputerowego kodu odpowiadającego rozwiązaniu ucznia nauczyciel odpowiadał na dwa dodatkowe pytania na temat tego rozwiązania.

Pytanie 1. Czy uczeń w rozwiązaniu zadania korzystał z rysunku?

Okazuje się, że tylko 7,5% uczniów próbowało pomóc sobie w rozwiązaniu korzystając z rysunku. Szkoda, że tak niewielka grupa uczniów korzysta z tego narzędzia, które bardzo często może być pomocne w rozwiązaniu – pomaga „zobaczyć” sytuację opisaną w zadaniu, zobrazować związki zachodzące między danymi, uporządkować podane informacje.

Pytanie 2. Jaką metodą uczeń rozwiązywał zadanie?

Metody wybierane przez uczniów, od najczęściej wybieranych do najrzadziej, to:

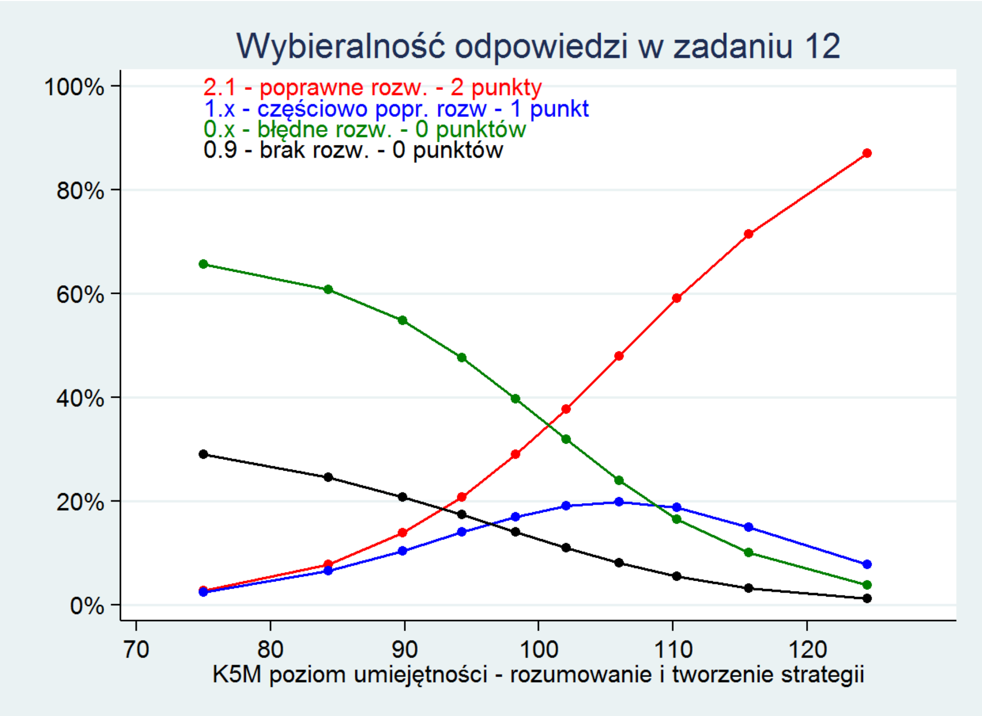
- 18% - chaotyczne sprawdzanie różnych przypadków, czyli klasyczna metoda prób i błędów,
- 11% - doliczanie po 3 lub 4 listki, tak długo, aż uda się „utrafić” w odpowiednią liczbę listków czyli 26, albo analogiczna metoda „wstecz”, czyli odliczanie od 26 po 3 lub 4 aż do zera,
- 11% - szukanie rozkładu podanej liczby listków (26) na składniki, z których jeden jest podzielny przez 3, a drugi przez 4,

- 4% - systematyczne sprawdzanie kolejnych przypadków, czyli rozwiązania podobne do II zaprezentowanego wcześniej,
- 2% - rozumowanie podobne do przedstawionych w I i III rozwiązaniu zaprezentowanym wcześniej,
- 2% - wypisywanie wielokrotności liczb 3 i 4 i szukanie par sumujących się do 26,
- 0,1% - ułożenie równania lub układu równań.

W pozostałych przypadkach nie dało się określić użytej metody, na przykład uczeń tylko wypisał dane z zadania, zapisał różne liczby lub działania lub po prostu podał odpowiedź bez żadnych wcześniejszych zapisów bądź rachunków.

Jak widać z przedstawionego zestawienia uczniowie najczęściej używają dwóch metod (prób i błędów, doliczanie lub odliczanie), w których znalezienie poprawnego zestawu liczb jest kwestią przypadku, a nie systematycznego działania. Niestety, gdyby w zadaniu występowały większe liczby, uzyskanie rozwiązania tymi metodami byłoby bardzo trudne. Te „przypadkowe" metody zastosowało łącznie 29% uczniów.

Taki sam odsetek uczniów – też 29% - zastosował którąś z kolejnych wymienionych metod. Są one znacznie lepsze, gdyż znalezienie rozwiązania nie jest kwestią przypadku lecz „systemowego" działania, które można zastosować również dla znacznie większych liczb lub w bardziej złożonych sytuacjach. To bardzo dobrze, że prawie co trzeci uczeń V klasy potrafi znaleźć i zastosować taką systematyczną metodę w takim nietypowym zadaniu.



Wykres pokazuje, że umiejętność rozwiązania tego zadania dość dobrze oddaje umiejętności uczniów w całym obszarze rozumowania i tworzenia strategii – im wyższy poziom umiejętności ucznia w tym obszarze, tym wyższy wynik w tym zadaniu:

- uczniowie najsłabsi nie potrafią tego zadania rozwiązać,
- wśród uczniów o średnich umiejętnościach 35% przedstawia rozwiązania całkowicie poprawne, a kolejne 20% rozwiązania częściowo poprawne,
- wśród uczniów najlepszych prawie 90% rozwiązuje je całkowicie poprawnie, 10% częściowo poprawnie, a tylko bardzo nieliczni przedstawiają rozwiązanie błędne.

Rekomendacje

Sposób rozwiązywania zadań poprzez systematyczne rozważanie różnych możliwości i weryfikowanie ich jest w pełni poprawną metodą. Zwłaszcza w szkole podstawowej, gdy umiejętności algebraiczne (budowanie i rozwiązywanie równań lub układów równań) nie są jeszcze znane lub zbyt dobrze rozwinięte, taka metoda staje się bardzo skutecznym narzędziem. W tej metodzie bardzo ważna jest ta systematyczność rozpatrywanych możliwości – nie tylko dlatego, by znaleźć rozwiązanie, ale również, aby przekonać samego ucznia, że znalezione rozwiązanie jest jedyne, że nie ma ich więcej.

Dobrze byłoby także, rozważając kolejne możliwości, zachęcać uczniów do dostrzegania pewnych prawidłowości, związków między zmieniającymi się wielkościami. Jest to pierwszy krok do prowadzenia rozumowań, w których nie jest już konieczne rozważanie konkretnych przypadków, a zamiast nich można rozwiązać problem w postaci ogólnej.

Warto także tak zaplanować pracę, aby niektóre zadania uczniowie mogli rozwiązać sami, swoimi własnymi sposobami, a następnie swoje rozwiązania przedstawili nauczycielowi i kolegom w klasie. Dobrze byłoby, aby pojawiły się wtedy różne sposoby rozwiązania.

Zadanie 13 (0-2) IV

W autokarze jechało 50 pasażerów. Z powodu awarii autokaru wezwano busy, aby przewieźć te osoby. Każdy bus może przewieźć 18 pasażerów, a za jego wynajęcie trzeba zapłacić 190 zł.

Jaki jest najniższy koszt wynajmu busów do przewozu tych pasażerów?

Wymagania ogólne:	IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe:	14. Zadania tekstowe. Uczeń:
	3) dostrzega zależności między podanymi informacjami.
	2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
	5) stosuje wygodne dla niego sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia.

Do poprawnego rozwiązania zadania niezbędne są umiejętności rachunkowe, ale najważniejsza jest umiejętność przeanalizowania i zrozumienia zasady przewozu pasażerów busami. Trudnością w zadaniu jest fakt, że 50 osób nie zmieści się w dwóch busach i nie wypełni trzech busów. Uczeń musi ten fakt dostrzec, odpowiednio zinterpretować i uwzględnić w obliczeniach.

Przykładowe rozwiązanie

2 · 18 = 36, 3 · 18 = 54 – wystarczą 3 busy,

3 · 190 = 570 zł – tyle trzeba zapłacić za ich wynajęcie

Schemat oceniania

2 punkty

kod 2.1 – Poprawny sposób rozwiązania i poprawny wynik: **570** (z jednostką lub bez, odpowiedź podana lub nie). Na przykład:

- 18 + 18 = 36 36 + 18 = 54
  3 · 190 = 300 + 270 = 570
- 50 – 18 = 32 32 – 18 = 14
  190 zł · 3 = 570 zł
- 1 bus = 190 zł
  2 busy = 190 · 2 = 380 zł
  3 busy = 190 · 3 = 570 zł

  18 + 18 + 18 = 54
  18 + 18 + 14 = 50

  Odp. 570 zł

UWAGA: Sposób zapisu obliczeń nie musi być formalnie poprawny.

- 50 : 18 = 3
  3 · 190 = 570 zł
- 50 : 18 = 2, …
  3 · 190 = 570 zł

Akceptujemy również rozwiązania, w których nie przedstawiono metody obliczenia liczby potrzebnych busów.

- 3 · 190 zł = 570 zł
- 2 · 18 = 36, 190 · 2 = 380 zł + 190 zł = 570 zł
  Odp. Najniższy koszt to 570 zł.

1 punkt

kod 1.1 – Poprawny sposób obliczenia kosztu przewozu z błędami rachunkowymi (uczeń popełnił błąd rachunkowy, ale tok myślenia i wnioskowanie są poprawne). Na przykład:

- 18, 36, 54, 72
  3 · 190 = 270 zł (*błąd rachunkowy w mnożeniu*)
- 50 : 18 = 2 reszta 2 ≈ 3
  190 + 190 + 190 = 570 zł
  (błędnie wykonane dzielenie z resztą, poprawne wnioskowanie)

- 2 · 18 = 36   3 · 18 = 48   4 · 18 = 72   – potrzebne są 4 busy
  4 · 190 = 760 zł
  (Błąd rachunkowy w drugim mnożeniu – na podstawie tego błędnego obliczenia uczeń poprawnie wnioskuje, że potrzebne są 4 busy i poprawnie oblicza kwotę potrzebną na ich wynajęcie. Zatem uczeń przeprowadza poprawne wnioskowanie na podstawie błędnego obliczenia.)

- 50 : 8 = 6 reszta 2,
  7 · 190 = 1330 zł
  (Uczeń rozdziela po 8 pasażerów do busa zamiast po 18 – na podstawie tego błędnego obliczenia wyciąga poprawny wniosek o liczbie busów i poprawnie oblicza opłatę za ich wynajęcie. Poprawne wnioskowanie na podstawie błędnego obliczenia.)

kod 1.2 – Poprawne wyznaczenie liczby busów (3) i poprzestanie na tym lub dalsze obliczenia niezgodne z tym ustaleniem. Na przykład:

- 50 – 18 = 32   32 – 18 = 14
  Wystarczą 3 autobusy.

- 50 : 18 = $\frac{50}{18} = 2\frac{14}{18}$, czyli 2 autobusy pełne i jeden z 14 osobami.
  2 · 190 = 380 zł
  (Uczeń poprawnie obliczył liczbę potrzebnych busów – 2 pełne i 1 niepełny – ale dalszy ciąg rozwiązania jest niepoprawny, bo do obliczenia należnej kwoty użył liczby 2 zamiast 3.)

0 punktów

kod 0.1 – Niepoprawnie wyznaczona liczba busów – błędny tok myślenia lub błędne wnioskowanie. Na przykład:

- 2 · 18 = 36   3 · 18 = 54   4 · 18 = 72   = 4 autobusy
  4 · 190 = 760 zł
  (Uczeń poprawnie oblicza, ile osób zmieści się do 2, 3 i 4 busów, ale błędnie wnioskuje, ile busów należy wynająć)

- 2 · 18 = 36   3 · 18 = 48   4 · 18 = 72   – wystarczą 3 busy
  3 · 190 = 570 zł
  (Uczeń popełnia błąd rachunkowy w obliczeniu, ile osób zmieści się do 3 busów – z tego obliczenia wynika, że potrzeba 4 busów. Tymczasem uczeń błędnie wnioskuje, że potrzebne są 3 busy.)

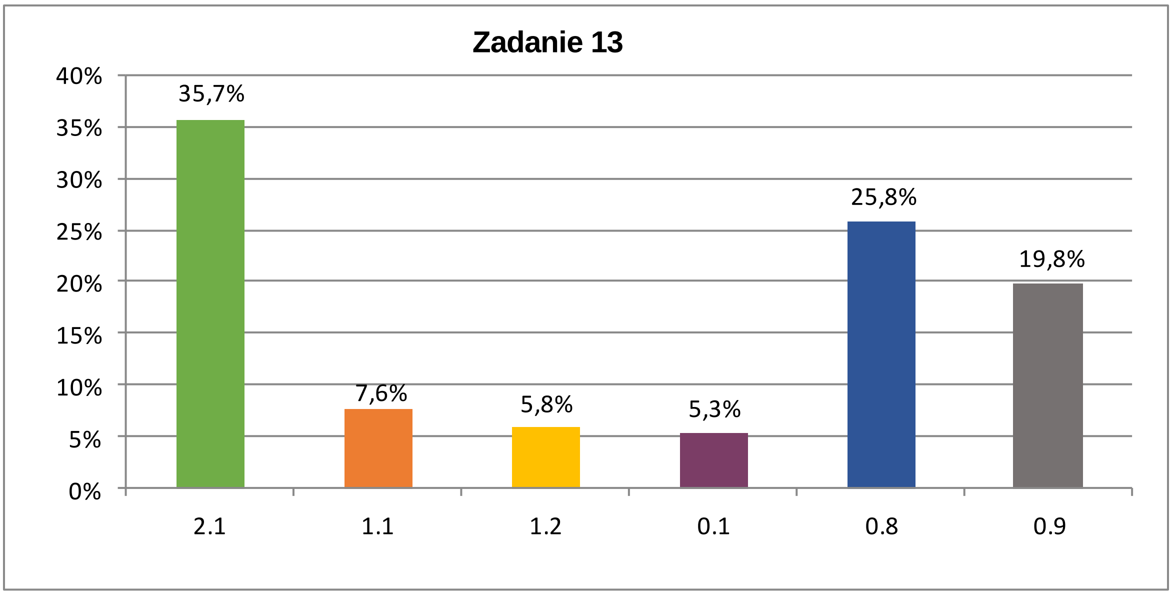
kod 0.8 – Inne rozwiązania błędne lub niepełne. Na przykład:

- 50 : 18 = 2,77…
  (*brak wniosku o liczbie potrzebnych busów i brak dalszych obliczeń*)

- 50 – 18 = 32   32 – 18 = 12
  190 + 190 = 380
  Odp. Najniższy koszt wynajmu autobusu to 400 zł.

kod 0.9 – Opuszczenie zadania

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



Średnio za to zadanie uczniowie otrzymali 0,85 punktu – jego łatwość wynosiła zatem 42%.

Zadanie zostało rozwiązane całkowicie poprawnie przez 35,7% uczniów (kod 2.1).

7,6% uczniów zastosowało poprawny sposób rozwiązania, ale popełniło w nim błędy rachunkowe (kod 1.1).

Kolejne 5,8% uczniów poprawnie wyznaczyło liczbę busów, potrzebnych do przewozu pasażerów i na tym poprzestało lub przedstawiło niepoprawną dalszą część rozwiązania (kod 1.2).

Następne 5,3% uczniów niepoprawnie wyznaczyło liczbę busów, potrzebnych do przewozu pasażerów. Uczniowie ci zastosowali błędny tok myślenia lub błędne wnioskowanie z przeprowadzonych obliczeń (kod 0.1).

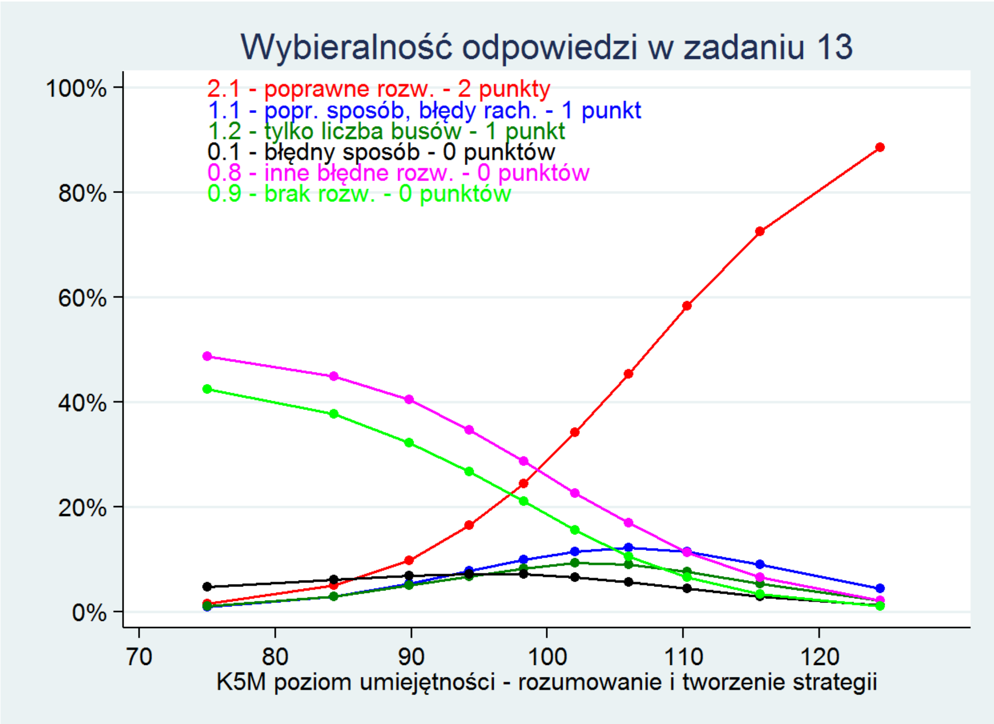
Dalsze 25,8% uczniów również przedstawiło rozwiązania błędne lub niepełne (kod 0.2).

I w końcu 19,8% uczniów nie podjęło próby rozwiązania zadania. Jest to najwyższy odsetek opuszczeń wśród wszystkich zadań. Nie jest to dziwne, gdyż było to ostatnie zadanie w zestawie i być może części uczniów nie starczyło już czasu lub siły na jego rozwiązanie.

Podsumowując:

- 36% uczniów rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie i uzyskało 2 punkty,
- 13% uczniów rozwiązało zadanie częściowo poprawnie i uzyskało 1 punkt,
- pozostałe 51% uczniów nie rozwiązało zadania lub rozwiązało je błędnie i otrzymało 0 punktów.

Te sumaryczne wyniki są bardzo podobne do uzyskanych w poprzednio omawianym zadaniu 12. – różnice nie przekraczają dwóch punktów procentowych. I również w tym zadaniu nie ma różnic między wynikami osiąganymi przez dziewczęta i chłopców.



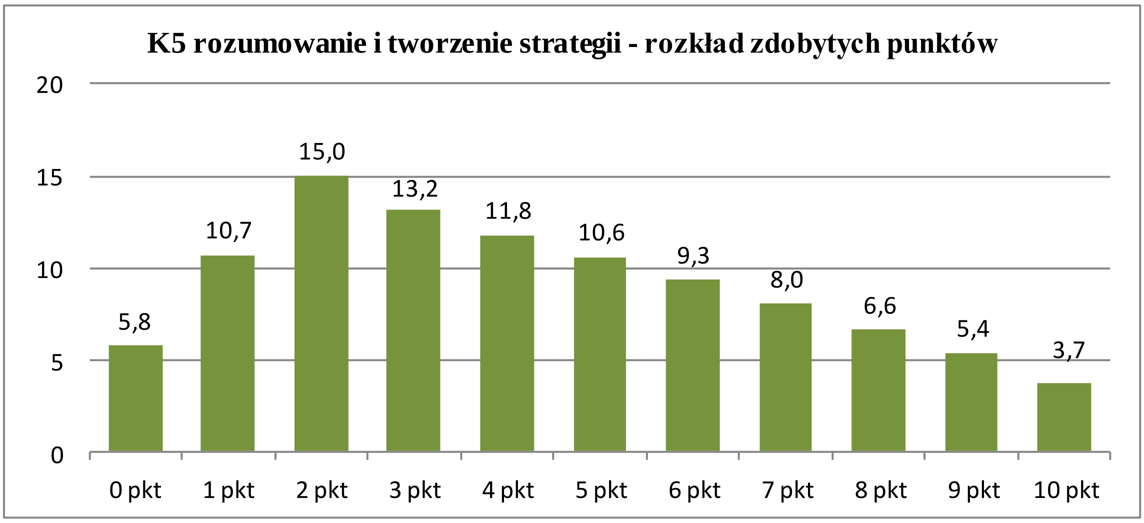
Ten wykres również jest bardzo podobny do wykresu dla zadania 12. Główna różnica polega na tym, że w zadaniu 12. uczniowie słabi rzadziej opuszczali zadanie, a częściej przedstawiali rozwiązanie błędne, natomiast w tym zadaniu linie pokazujące te dwa kody są położone bliżej siebie.

Rekomendacje

Zadania podobne do omawianego są dość znane i obecne na lekcjach matematyki od dawna. Szczególnie godne polecenia jest rozwiązywanie analogicznych zadań osadzonych w realnym kontekście, dzięki czemu uczniowie nabędą wprawy w dostrzeganiu zależności opisanych w zadaniu i z większą uwagą będą analizowali jego treść. Polecamy również stosowanie przez uczniów własnych rysunków, schematów, które również ułatwią dostrzeganie zależności i związków między informacjami. Po omówieniu w klasie takich zadań można także zachęcić uczniów do zmiany danych i formułowania kolejnych pytań dotyczących opisanej sytuacji, a następnie do samodzielnego wymyślania zadań zawierających podobne reguły. Taki rodzaj zadań daje szanse uczniom, którzy na co dzień nie są zbyt aktywni na lekcjach matematyki.

3.3.2. Rozumowanie i tworzenie strategii – podsumowanie

W zadaniach sprawdzających umiejętność rozumowania i tworzenia strategii uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 10 punktów. Wykres poniżej pokazuje rozkład uzyskanych punktów.



W tym obszarze uczniowie zdobyli średnio 4,31 punktu, czyli 43% punktów możliwych do uzyskania. Mediana rozkładu wynosi 4 punkty, co oznacza, że połowa uczniów zdobyła za swoje umiejętności rozumowania i tworzenia strategii 4 punkty lub mniej, ale druga połowa 4 punkty lub więcej.

Z wykresu wynika, że aż 3,7%, czyli 5702 uczniów rozwiązało wszystkie zadania z tego obszaru i zdobyło za nie komplet punktów. Z drugiej strony nadal jest 5,8%, czyli 8837 uczniów, którzy nie zdobyli w tym obszarze żadnego punktu, czyli nie potrafi nawet sensownie rozpocząć żadnego z zadań otwartych.

Poziom trudności zadań z tego obszaru był dość wyrównany – wahał się od 34% w zadaniu o budowaniu prostokąta z kwadratów, do 54% w zadaniu dotyczącym objętości i pola powierzchni bryły zbudowanej z sześciennych klocków.

Ze sposobów rozwiązań zadań i popełnianych błędów wynika, że duża część uczniów ma problemy z dostrzeganiem zależności, zarówno o charakterze arytmetycznym (zadanie o kolorowaniu brzegu kwadratu), jak i geometrycznym (zadanie o budowaniu prostokąta z kwadratów). Około połowy uczniów nie radzi sobie wystarczająco dobrze z dobieraniem lub tworzeniem strategii rozwiązania zadania, czyli z wyborem i ustaleniem kolejność czynności prowadzących do rozwiązania przedstawionego problemu. Takie umiejętności trzeba było zaprezentować w dwóch ostatnich zadaniach z zestawu – o koniczynkach i o autokarach.

Oddzielnym problemem jest właściwe ukształtowanie w umysłach uczniów pojęć geometrycznych – obwodu, pola, objętości czy pola powierzchni. Rozumienie tych pojęć jest dość luźno związane z umiejętnościami zaprezentowanymi przez uczniów w pozostałych zadaniach z obszaru rozumowanie i tworzenie strategii.

W żadnym z zadań sprawdzających umiejętność rozumowania i tworzenia strategii nie ma różnic w wynikach osiąganych przez dziewczynki i chłopców.

3.3.3. Rozumowanie i tworzenie strategii – rekomendacje

Na poziomie szkoły podstawowej zarówno rozumowanie, jak i strategia rozwiązania zadania, których oczekujemy od uczniów nie mogą być zbyt złożone – powinny się sprowadzać do zaplanowania, ustalenia kolejności i wykonania niewielkiej liczby kroków (w tym obliczeń) prowadzących do rozwiązania problemu oraz umiejętności wnioskowania na podstawie kilku informacji podanych w różnych postaciach.

W zadaniach z tego obszaru bardzo ważna jest umiejętność starannego przeanalizowania i zrozumienia związków między informacjami danymi w zadaniu. Uczeń łatwiej je dostrzeże i zrozumie, jeśli samodzielnie, w najwygodniejszy dla siebie sposób, zapisze lub narysuje sytuację przedstawioną w zadaniu. Ta umiejętność była kluczowa przy rozwiązywaniu zadania o autokarze.

Zwróćmy uwagę na rozwiązywanie zadań poprzez systematyczne sprawdzanie różnych możliwości. Na poziomie szkoły podstawowej, gdy uczniowie nie mają jeszcze do dyspozycji metod algebraicznych (równań i układów równań), taka metoda jest bardzo wartościowym narzędziem – rozważanie różnych możliwości i weryfikowanie ich pozwala uczniom dostrzec i zrozumieć związki i zależności zachodzące między elementami zadania. Dlatego warto stosować ją na lekcjach, starając się tak ukierunkować myślenie uczniów, aby podejmowane przez nich próby były uporządkowane – aby kolejne wynikały z poprzednich. Dobrze byłoby znaleźć wspólnie z uczniami również inne, alternatywne sposoby rozwiązania.

Warto rozwiązywać na lekcjach także dłuższe, kilkuetapowe zadania, ponieważ często uczniowie są w stanie wykonać poprawnie pojedyncze kroki, ale nie potrafią związać tych kroków w całość. Utworzenie logicznego ciągu operacji, wykorzystującego informacje dane w zadaniu i prowadzącego do rozwiązania, jest czynnością trudną i wymagającą sporego doświadczenia. Dlatego warto stawiać uczniów przed takimi wyzwaniami.

W zakresie geometrii uczniowie mają spory problem z wyobraźnią przestrzenną – operowanie w wyobraźni bryłami, ich sklejanie lub dzielenie oraz świadomość, jak zmieniają się ich pola i objętości jest dla uczniów trudne. Dlatego należy stwarzać uczniom dużo różnorodnych okazji do manipulowania bryłami – do budowania z klocków brył zadanych przez nauczyciela lub innych uczniów, a następnie modyfikowania ich i obserwowania, czy i jak zmieniają się ich pola i objętości.

W celu rozwijania na lekcjach matematyki umiejętności rozumowania i budowania strategii należy:

- przedstawiać uczniom różnorodne teksty zawierające wiele powiązanych ze sobą informacji wraz z zestawem pytań do nich;
- zadbać o odpowiednią wizualizację sytuacji – rysunek czy schemat, skłaniać uczniów do samodzielnego tworzenia takich wizualizacji po to, aby taka forma prezentowania informacji była punktem wyjścia do zbudowania strategii i opracowania sposobu rozwiązania;
- rozwiązywać krótkie jednoetapowe zadania i łączyć je tak, aby tworzyć z nich dłuższe ciągi rozumowań;
- ćwiczyć proste dwu-, trzyetapowe rozumowania i bardzo dokładnie je analizować;
- rozwiązywać z uczniami kilkuetapowe zadania, w których każdy kolejny etap jest bardzo prosty, a trudność polega głównie na określeniu, jakie kroki i w jakiej kolejności należy wykonać,
- proponować uczniom samodzielne stawianie problemów, których rozwiązanie wymaga opracowania strategii lub pewnego procesu rozumowania;
- rozwiązywać zadania metodą systematycznego rozważania kolejnych możliwości;
- stosować poprawnie metodę prób i błędów;

- stwarzać uczniom sytuacje do manipulowania figurami na płaszczyźnie i w przestrzeni, domagać się od uczniów prowadzenia obserwacji, formułowania spostrzeżeń.

- wykorzystać każdą nadarzającą się sytuację do ćwiczenia umiejętności argumentacji i wnioskowania – np. w przypadku pojawienia się błędnej odpowiedzi lub błędnego zapisu na tablicy.

Różnica pomiędzy typowymi ćwiczeniami, polegającymi na operowaniu obiektami w prostej sytuacji, a zadaniami opartymi na rozumowaniu i budowaniu strategii polega na tym, że w pierwszym przypadku wymagają one od ucznia przypomnienia znanych, przećwiczonych algorytmów i zastosowania ich w zadaniu. W drugim przypadku wymagamy od ucznia szeregu złożonych umiejętności, czyli kolejno: analizy sytuacji przedstawionej w zadaniu, matematyzacji tej sytuacji czyli opracowania jej modelu matematycznego, następnie dostrzeżenia drogi dojścia do rozwiązania, rozłożenia tej drogi na kolejne kroki postępowania i na koniec wykonania tych kroków.