Popatrzmy na następujące trzy zadania:

Zadanie 1. Ile jest liczb dwudziestocyfrowych o sumie cyfr równej 5?

Zadanie 2. Oblicz, ile jest liczb dwudziestocyfrowych spełniających jednocześnie następujące trzy warunki:

- w rozważanych liczbach występują wyłącznie cyfry 1, 2 i 3,
- każda cyfra 1, 2 i 3 występuje co najmniej jeden raz,
- cyfry występują w rozważanej liczbie w kolejności niemalejącej, tzn. wszystkie cyfry 1 występują przed wszystkimi cyframi 2 i 3 oraz wszystkie cyfry 2 występują przed wszystkimi cyframi 3.

Przykładowe takie liczby:

$$11111122223333333333, \quad 12222222222222222223, 11111111111111111123.$$

Zadanie 3. Oblicz, ile jest liczb dwudziestocyfrowych spełniających jednocześnie następujące dwa warunki:

- w rozważanych liczbach występują wyłącznie cyfry 1, 2 i 3,
- cyfry występują w rozważanej liczbie w kolejności niemalejącej, tzn. wszystkie cyfry 1 występują przed wszystkimi cyframi 2 i 3 oraz wszystkie cyfry 2 występują przed wszystkimi cyframi 3.

Przykładowe takie liczby (oprócz trzech przykładowych liczb pokazanych w zadaniu 2):

$$11111111111111111111, 11111111113333333333, 22222222222222222223.$$

Oczywiście zadania 2 i 3 są podobne. Co jednak ma z nimi wspólnego zadanie 1? Okaże się, że istnieje wspólna metoda rozwiązania tych trzech zadań. Na razie jednak zajmijmy się najbardziej naturalnymi rozwiązaniami tych zadań.

W rozwiązaniach tych trzech zadań będziemy korzystać z dwóch reguł kombinatorycznych (reguły dodawania i reguły mnożenia) oraz z pojęcia współczynnika dwumianowego (tzw. „symbolu Newtona"). Reguły dodawania i mnożenia zostały dokładnie opisane w omówieniu zadania 41 z *Informatora* (część podstawowa). Tutaj omówię własności współczynników dwumianowych.

Współczynniki dwumianowe możemy definiować na wiele sposobów. Jeden sposób polega na zdefiniowaniu ich wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

dla n i k takich, że $0 \leq k \leq n$. Inny polega na zdefiniowaniu współczynnika $\binom{n}{k}$ jako liczby k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego (często przy tym używamy terminologii kombinatorycznej, mówiąc o k-elementowych kombinacjach ze zbioru n-elementowego). W pierwszym sposobie definiowania współczynników dwumianowych nie podkreśla się w należyty sposób, że jest to pojęcie nie tyle algebraiczne, ale kombinatoryczne. Drugi sposób definiowania wymaga od ucznia zapoznania się z pojęciem zbioru i podzbioru. Oczywiście te pojęcia będziemy musieli wprowadzić w czasie nauki kombinatoryki, ale chyba dydaktycznie lepiej jest nie opierać jednej z najważniejszych definicji na pojęciach, które dla uczniów są nowe i niedostatecznie przyswojone.

Opiszę tutaj mój ulubiony sposób wprowadzania współczynników dwumianowych. Po raz pierwszy uczniowie stykają się ze współczynnikami dwumianowymi przy okazji wzorów skróconego mnożenia. Najpierw wyprowadzam wzory na kwadrat i sześcian sumy:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Następnie proszę uczniów, by w domu w podobny sposób wyprowadzili kilka następnych wzorów:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\ (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,\\ (a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6,\\ (a+b)^7 &= a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7,\\ (a+b)^8 &= a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8.\end{aligned}$$

Uczniowie dostrzegają regułę. Po prawej stronie wzoru na $(a+b)^n$ mamy zawsze sumę podobnie wyglądających składników: pierwszym jest a^n (czyli a^nb^0), w każdym następnym potęgi a maleją, a potęgi b rosną i tak aż do ostatniego składnika, którym jest b^n (czyli a^0b^n). Zagadką natomiast pozostają współczynniki. Wyjaśniam uczniom, że one biorą się z tzw. trójkąta Pascala, który wypisujemy na tablicy:

$$\begin{array}{c}
1 \qquad 1\\
1 \qquad 2 \qquad 1\\
1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1\\
1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1\\
1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1\\
1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1\\
1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1\\
1 \qquad 8 \qquad 28 \qquad 56 \qquad 70 \qquad 56 \qquad 28 \qquad 8 \qquad 1\\
1 \qquad 9 \qquad 36 \qquad 84 \qquad 126 \qquad 126 \qquad 84 \qquad 36 \qquad 9 \qquad 1\\
1 \qquad 10 \qquad 45 \qquad 120 \qquad 210 \qquad 252 \qquad 210 \qquad 120 \qquad 45 \qquad 10 \qquad 1
\end{array}$$

Podaję wtedy uczniom zasadę tworzenia kolejnych wierszy: zaczynamy i kończymy każdy wiersz jedynką; każda z pozostałych liczb jest sumą dwóch liczb sąsiadujących z nią jeden wiersz wyżej. Nie podaję wtedy wzoru na współczynniki dwumianowe; zostawiam to na później, gdy zaczynam uczyć kombinatoryki.

Naukę kombinatoryki rozpoczynam od wprowadzenia reguł mnożenia i dodawania (jak wspomniałem wyżej, opisałem je dokładniej w omówieniu zadania 41 z *Informatora*).

Lekcję dotyczącą współczynników dwumianowych rozpoczynam od wprowadzenia pojęcia ciągu **zerojedynkowego**: jest to ciąg liczb, którego każdy wyraz jest zerem lub jedynką. Dopuszczalne jest też, by któraś z tych liczb w ciągu nie wystąpiła. Takie ciągi zapisujemy bez przecinków oddzielających kolejne wyrazy. Po kilku przykładach proszę uczniów, by w domu wypisali wszystkie ciągi zerojedynkowe długości 2, 3, 4 i 5 (czasem nawet też długości 6) oraz pogrupowali je według liczby jedynek w ciągu oraz odpowiedzieli na pytanie, ile jest ciągów zerojedynkowych długości n (gdzie $1 \leq n \leq 5$), w których jest k jedynek (gdzie $0 \leq k \leq n$). Łatwo grupujemy ciągi długości 1 i 2:

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} 00 & 01 & 11 \\ & 10 & \end{array}$$

Ciągi długości 3 grupujemy w czterech kolumnach:

$$\begin{array}{cccc} 000 & 001 & 011 & 111 \\ & 010 & 101 & \\ & 100 & 110 & \end{array}$$

Dla przykładu pokażę jeszcze pogrupowane ciągi długości 5:

$$\begin{array}{cccccc}
00000 & 00001 & 00011 & 00111 & 01111 & 11111 \\
 & 00010 & 00101 & 01011 & 10111 & \\
 & 00100 & 00110 & 01101 & 11011 & \\
 & 01000 & 01001 & 01110 & 11101 & \\
 & 10000 & 01010 & 10011 & 11110 & \\
 & & 01100 & 10101 & & \\
 & & 10001 & 10110 & & \\
 & & 10010 & 11001 & & \\
 & & 10100 & 11010 & & \\
 & & 11000 & 11100 & &
\end{array}$$

Uczniowie, którzy prawidłowo wykonają zadanie domowe (a więc na przykład nie zgubią niektórych ciągów, co często się zdarza), zauważają, że znalezione liczby tworzą znany im trójkąt Pascala. Teraz wprowadzam oznaczenie: symbol $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę stojącą w wierszu o numerze n na miejscu o numerze k; zwracam uwagę na to, że numeracja wierszy zaczyna się od jedynki, a numeracja liczb w wierszach zaczyna się od zera. Mamy zatem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Mamy także **kombinatoryczną definicję** współczynnika dwumianowego: liczba $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek. Przypominam zasadę tworzenia trójkąta Pascala: każdy wiersz zaczyna się i kończy jedynką oraz każda z pozostałych liczb w danym wierszu jest sumą dwóch liczb sąsiadujących z nią jeden wiersz wyżej. Tę zasadę możemy sformułować w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 1. Dla dowolnego $n \geq 1$ mamy:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Ponadto dla dowolnego $n \geq 2$ i dowolnego k takiego, że $0 < k < n$ mamy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dowód. Równość $\binom{n}{0} = 1$ wynika stąd, że istnieje dokładnie jeden ciąg zerojedynkowy długości n mający 0 jedynek, mianowicie ciąg składający się z samych zer. Podobnie $\binom{n}{n} = 1$, bo tylko jeden ciąg zerojedynkowy długości n ma n jedynek; jest to ciąg składający się z samych jedynek. Przypuśćmy teraz, że mamy liczby n i k takie, że $n \geq 2$ oraz $0 < k < n$. Wyobrażamy sobie, że wszystkie ciągi zerojedynkowe długości n i mające k jedynek wypisujemy w dwóch kolumnach. W pierwszej kolumnie znajdą się te ciągi, w których ostatni wyraz jest równy 1. W drugiej kolumnie znajdą się te ciągi, w których ostatni wyraz jest równy 0. Popatrzmy na przykład. Niech $n = 6$ i $k = 4$. Oto wszystkie ciągi zerojedynkowe długości 6, w których występują 4 jedynki:

00111 | 1	01111 | 0
01011 | 1	10111 | 0
01101 | 1	11011 | 0
01110 | 1	11101 | 0
10011 | 1	11110 | 0
10101 | 1	
10110 | 1	
11001 | 1	
11010 | 1	
11100 | 1	

Ostatnie wyrazy tych ciągów zostały oddzielone kreską. W pierwszej kolumnie mamy ciągi kończące się jedynką, w drugiej mamy ciągi kończące się zerem. Zauważmy, że przed kreską mamy w pierwszej kolumnie wszystkie możliwe ciągi zerojedynkowe długości 5 z trzema jedynkami, a w drugiej wszystkie możliwe ciągi zerojedynkowe długości 5 z czterema jedynkami. A więc w naszym przykładzie mamy równość

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4}.$$

Popatrzmy teraz na te ciągi w całej ogólności. Najpierw we wszystkich ciągach z pierwszej kolumny skreślmy ostatnią jedynkę — otrzymamy wszystkie możliwe ciągi zerojedynkowe długości $n - 1$ mające $k - 1$ jedynek (pamiętajmy, że jedną z k jedynek skreśliliśmy). Następnie we wszystkich ciągach w drugiej kolumnie skreślmy ostatnie zero — otrzymamy wszystkie ciągi zerojedynkowe długości n mające k jedynek. Zatem z definicji współczynnika dwumianowego wynika, że w pierwszej kolumnie znajduje się $\binom{n-1}{k-1}$ ciągów zerojedynkowych, a w drugiej znajduje się $\binom{n-1}{k}$ ciągów. Podsumujmy:

- w obu kolumnach razem mamy wszystkie ciągi zerojedynkowe długości n, w których jest k jedynek,
- zatem w obu kolumnach razem znajduje się $\binom{n}{k}$ ciągów,
- w pierwszej kolumnie znajduje się $\binom{n-1}{k-1}$ ciągów,
- w drugiej kolumnie znajduje się $\binom{n-1}{k}$ ciągów,
- żaden ciąg nie występuje w obu kolumnach.

Z reguły dodawania wynika zatem, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

To kończy dowód twierdzenia.

Ciągi zerojedynkowe mają wiele dobrych interpretacji. Ciąg zerojedynkowy długości n, w którym jest k jedynek wskazuje pewien sposób wybierania k obiektów spośród n obiektów. Numerujemy mianowicie wszystkie obiekty liczbami od 1 do n i wybieramy obiekty o tych numerach, na których miejscach w naszym ciągu zerojedynkowym stoi jedynka. Zatem współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ jest równy liczbie sposobów wybrania k obiektów spośród n obiektów. Inaczej mówiąc, jest to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

Naturalnym pytaniem jest to, w jaki sposób możemy obliczać współczynniki dwumianowe. Dla małych n możemy po prostu wypisać kilka początkowych wierszy trójkąta Pascala. Chcielibyśmy jednak mieć wzór pozwalający obliczać dowolne współczynniki dwumianowe. Taki wzór wyprowadzam z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1 \le k \le n$. Wówczas

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Dowód. Rozważamy wszystkie ciągi zdefiniowane w następujący sposób:

- ciąg ma długość n oraz wśród jego wyrazów jest $k-1$ jedynek, jedna dwójka i wszystkie pozostałe wyrazy są zerami.

Pomysł rozumowania polega na tym, by tak zdefiniowane ciągi zliczyć dwoma sposobami. Ponieważ liczba tych ciągów nie zależy oczywiście od sposobu zliczania, więc otrzymane dwie liczby będą równe. Oba sposoby zliczania polegają tak naprawdę na tym, by policzyć, na ile sposobów możemy taki ciąg skonstruować.

Sposób 1. Najpierw tworzymy ciąg zerojedynkowy długości n, w którym jest k jedynek (z definicji współczynnika dwumianowego możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów), a następnie jedną jedynkę zamieniamy na dwójkę (ponieważ jest k jedynek, więc niezależnie od tego, na których miejscach one stoją w naszym ciągu, możemy to zrobić na k sposobów). Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $k \cdot \binom{n}{k}$ ciągów rozważanej postaci.

Sposób 2. Najpierw wybieramy miejsce, na którym wpiszemy dwójkę. Możemy to miejsce wybrać na n sposobów. Pozostaje $n-1$ miejsc; możemy je potraktować jako miejsca, w które wpiszemy wyrazy ciągu zerojedynkowego długości $n-1$, w którym jest $k-1$ jedynek. Z definicji współczynnika dwumianowego wiemy, że istnieje $\binom{n-1}{k-1}$ takich ciągów. Znów korzystamy z reguły mnożenia i stwierdzamy, że istnieje $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ ciągów rozważanej postaci.

Jak wspomniałem, niezależnie od sposobu zliczania elementów, musimy otrzymać ten sam wynik. Mamy zatem równość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

co kończy dowód twierdzenia.

Powyższy dowód prowokuje do następującego komentarza. Użycie ciągów zerojedynkowych pozwala na pokazanie w trakcie dowodu łatwego przykładu dobrze ilustrującego główny pomysł. Oczywiście można zrobić to samo z podzbiorami zbioru sześcioelementowego, ale — moim zdaniem — użycie ciągów jest bardziej czytelne dla ucznia.

Wniosek. Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1 \leq k \leq n$. Wówczas

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Z tego wniosku wyprowadzam kilka wzorów, z których korzystamy najczęściej (zakładam tutaj, że $n \geq 3$):

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} &= \frac{n}{1} \cdot \binom{n-1}{0} = n \cdot 1 = n, \\
\binom{n}{2} &= \frac{n}{2} \cdot \binom{n-1}{1} = \frac{n}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \\
\binom{n}{3} &= \frac{n}{3} \cdot \binom{n-1}{2} = \frac{n}{3} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.
\end{aligned}$$

Ten sposób obliczania współczynników dwumianowych ilustruję jednym zadaniem.

Zadanie. Na ile sposobów można wybrać 6 różnych liczb spośród liczb od 1 do 49?

Rozwiązanie. Z definicji wiemy, że liczba takich podzbiorów jest równa $\binom{49}{6}$. Korzystając kilkakrotnie z powyższego wzoru oraz ze znanego nam już wzoru $\binom{n}{0} = 1$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\binom{49}{6} &= \frac{49}{6} \cdot \binom{48}{5} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \binom{47}{4} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \binom{46}{3} = \\
&= \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \binom{45}{2} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \binom{44}{1} = \\
&= \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{44}{1} \cdot \binom{43}{0} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{44}{1} \cdot 1 = \\
&= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.
\end{aligned}$$

Po skróceniu ułamka (bo: $48 = 6 \cdot 4 \cdot 2$ oraz $15 = 5 \cdot 3$) , otrzymujemy

$$\binom{49}{6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13983816.$$

Nietrudno uogólnić to rozumowanie, by otrzymać wzór ogólny na współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$. Ścisłe rozumowanie wymaga indukcji matematycznej. Ale możemy przekonać uczniów o słuszności wzoru na podstawie kilku przykładów pokazujących w istocie to samo rozumowanie lub za pomocą obliczenia:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \\
&= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \binom{n-2}{k-2} = \\
&= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \binom{n-3}{k-3} = \\
&\dots \\
&= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} \cdot \binom{n-k}{k-k} = \\
&= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} \cdot 1 = \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.
\end{aligned}$$

Znajomość wzoru ogólnego jest oczywiście bardzo przydatna w obu postaciach:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k)!} = \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.
\end{aligned}$$

Proszę jednak uczniów, by zapamiętali kilka szczególnych przypadków tego wzoru i by w tych przypadkach nie odwoływali się do wzoru ogólnego. Przypominam te wyprowadzone wyżej najważniejsze przypadki:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ten wstęp chcę zakończyć kilkoma ogólnymi uwagami dotyczącymi nauczania kombinatoryki. Po pierwsze, kombinatoryka to nie tylko permutacje, kombinacje i wariacje (z powtórzeniami lub bez) i wzory na liczbę tych obiektów. Tych pojęć na lekcji wręcz nie omawiam. Kombinatoryka (przynajmniej w zakresie obowiązującym w szkole) to przede wszystkim sztuka zliczania elementów zbiorów skończonych. Chciałbym, by uczniowie nauczyli się tej sztuki korzystając z najprostszych zasad — ten sposób myślenia przyda im się w dalszej nauce kombinatoryki, bardziej niż wyłącznie umiejętność rozpoznawania wybranych obiektów kombinatorycznych (wspomniane permutacje, kombinacje i wariacje). Każde zadanie, w którym korzysta się z gotowych wzorów na przykład na liczbę wariacji, można bardzo łatwo rozwiązać bezpośrednio z reguły mnożenia — ale nie na odwrót. Istnieje także wiele zadań, które można łatwo rozwiązać za pomocą rozumowania kombinatorycznego i trudno rozwiązać innym sposobem. Przykładem jest następująca tożsamość:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Dowód polega na zliczaniu dwoma sposobami ciągów zerojedynkowych długości $2n$ mających n jedynek. Z jednej strony jest ich oczywiście $\binom{2n}{n}$. To jest prawa strona wzoru. Z drugiej strony patrzymy na liczbę jedynek wśród pierwszych n wyrazów ciągu — jest to liczba od 0 do n. Dla każdej liczby k takiej, że $0 \le k \le n$ policzymy ciągi mające k jedynek.

Jeśli wśród pierwszych n wyrazów ciągu jest k jedynek, to wśród ostatnich n wyrazów jest $n-k$ jedynek. Istnieje $\binom{n}{k}$ ciągów mających k jedynek. Istnieje następnie $\binom{n}{n-k}$ ciągów mających $n-k$ jedynek. Nietrudno zauważyć, że prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}.$$

Istnieje zatem $\binom{n}{k}$ ciągów mających $n-k$ jedynek. Bierzemy teraz dwa ciągi: jeden mający k jedynek i jeden mający $n-k$ jedynek, a następnie łączymy w jeden ciąg zerojedynkowy długości $2n$ mający n jedynek. Reguła mnożenia mówi, że możemy to zrobić na $\binom{n}{k}^2$ sposobów. Pokazaliśmy zatem, że istnieje $\binom{n}{k}^2$ ciągów zerojedynkowych długości $2n$, w których jest n jedynek umieszczonych tak, że w pierwszej połowie ciągu znajduje się k jedynek.

Teraz reguła dodawania mówi, że tak otrzymane liczby mamy dodać; to daje lewą stronę wzoru. W ten sposób dowód wzoru został zakończony. Oczywiście istnieje także dowód czysto rachunkowy; jest on jednak bardziej skomplikowany.

Po tym wstępie przejdźmy do rozwiązania naszych trzech zadań.

Najpierw zajmijmy się zadaniem 1. Jednak zanim je rozwiążemy, popatrzmy na rozwiązania kilku zadań prostszych.

Zadanie 4. Ile jest liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 2?

Rozwiązanie. Rozważamy dwa przypadki, gdyż sumę cyfr 2 możemy uzyskać na dwa sposoby.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba: 200000.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

$$110000, \quad 101000, \quad 100100, \quad 100010 \quad \text{oraz} \quad 100001.$$

Łącznie mamy więc 6 liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr 2.

Powyższe rozwiązanie możemy zapisać nieco inaczej. Sumę cyfr 2 możemy uzyskać na dwa sposoby:

$$2 = 2 + 0, \quad 2 = 1 + 1.$$

W powyższym zapisie pierwszy składnik oznacza pierwszą cyfrę rozważanej liczby; drugi zaś oznacza, że wśród pozostałych pięciu cyfr znajdują się albo same zera (w przypadku pierwszym), albo jedna jedynka (w przypadku drugim). Oczywiście jest tylko jedna możliwość, w której po pierwszej cyfrze równej 2 występują same zera. Natomiast istnieje 5 liczb, w których po pierwszej jedynce występuje jedna jedynka i cztery zera: jedynka może być bowiem na jednym z pięciu miejsc.

Zadanie 5. Ile jest liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 3?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 3 możemy uzyskać na cztery sposoby:

- $3 = 3 + 0$,
- $3 = 2 + 1$,
- $3 = 1 + 2$,
- $3 = 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 4 przypadki.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba: 300000.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

$$210000, \quad 201000, \quad 200100, \quad 200010 \quad \text{oraz} \quad 200001.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

$$120000, \quad 102000, \quad 100200, \quad 100020 \quad \text{oraz} \quad 100002.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$111000,\quad 110100,\quad 110010,\quad 110001,\quad 101100,\quad 101010,$$
  $$101001,\quad 100110,\quad 100101\quad \text{oraz}\quad 100011.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

Łącznie mamy zatem $1 + 5 + 5 + 10 = 21$ liczb.

Zadanie 6. Ile jest liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 4?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 4 możemy uzyskać na osiem sposobów:

- $4 = 4 + 0$,
- $4 = 3 + 1$,
- $4 = 2 + 2$,
- $4 = 2 + 1 + 1$,
- $4 = 1 + 3$,
- $4 = 1 + 2 + 1$,
- $4 = 1 + 1 + 2$,
- $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 8 przypadków.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 4, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba: 400000.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

  $$310000,\quad 301000,\quad 300100,\quad 300010\quad \text{oraz}\quad 300001.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

  $$220000,\quad 202000,\quad 200200,\quad 200020\quad \text{oraz}\quad 200002.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$211000,\quad 210100,\quad 210010,\quad 210001,\quad 201100,\quad 201010,$$
  $$201001,\quad 200110,\quad 200101\quad \text{oraz}\quad 200011.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 5.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 3, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

$$130000, \quad 103000, \quad 100300, \quad 100030 \quad \text{oraz} \quad 100003.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 6.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$121000, \quad 120100, \quad 120010, \quad 120001, \quad 102100, \quad 102010,$$
$$102001, \quad 100210, \quad 100201 \quad \text{oraz} \quad 100021.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.

- **Przypadek 7.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$112000, \quad 120100, \quad 110020, \quad 110002, \quad 101200, \quad 101020,$$
$$101002, \quad 100120, \quad 100102 \quad \text{oraz} \quad 100012.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.

- **Przypadek 8.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$111100, \quad 111010, \quad 111001, \quad 110110, \quad 110101, \quad 110011,$$
$$101110, \quad 101101, \quad 101011 \quad \text{oraz} \quad 100111.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{3} = 10$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

Łącznie mamy zatem $1 + 5 + 5 + 10 + 5 + 10 + 10 + 10 = 56$ liczb.

Zadanie 7. Ile jest liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 5?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 5 możemy uzyskać na 16 sposobów:

- $5 = 5 + 0$,

- $5 = 4 + 1$,
- $5 = 3 + 2$,
- $5 = 3 + 1 + 1$,
- $5 = 2 + 3$,
- $5 = 2 + 2 + 1$,
- $5 = 2 + 1 + 2$,
- $5 = 2 + 1 + 1 + 1$,
- $5 = 1 + 4$,
- $5 = 1 + 3 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 3$,
- $5 = 1 + 2 + 2$,
- $5 = 1 + 2 + 1 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 2 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 1 + 2$,
- $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 16 przypadków.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 5, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba: 500000.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 4, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

  $$410000, \quad 401000, \quad 400100, \quad 400010 \quad \text{oraz} \quad 400001.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 4, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

  $$320000, \quad 302000, \quad 300200, \quad 300020 \quad \text{oraz} \quad 300002.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$311000, \quad 310100, \quad 310010, \quad 310001, \quad 301100, \quad 301010,$$
  $$301001, \quad 300110, \quad 300101 \quad \text{oraz} \quad 300011.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 5.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 3, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

  $$230000, \quad 203000, \quad 200300, \quad 200030 \quad \text{oraz} \quad 200003.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 6.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$221000,\quad 220100,\quad 220010,\quad 220001,\quad 202100,\quad 202010,$$
  $$202001,\quad 200210,\quad 200201\quad \text{oraz}\quad 200021.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 7.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$212000,\quad 120100,\quad 210020,\quad 210002,\quad 201200,\quad 201020,$$
  $$201002,\quad 200120,\quad 200102\quad \text{oraz}\quad 200012.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 8.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$211100,\quad 211010,\quad 211001,\quad 210110,\quad 210101,\quad 210011,$$
  $$201110,\quad 201101,\quad 201011\quad \text{oraz}\quad 200111.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{5}{3} = 10$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 9.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 4, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

  $$140000,\quad 104000,\quad 100400,\quad 100040\quad \text{oraz}\quad 100004.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy 5 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 4 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 10.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 3 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

  $$131000,\quad 130100,\quad 130010,\quad 130001,\quad 103100,\quad 103010,$$
  $$103001,\quad 100310,\quad 100301\quad \text{oraz}\quad 100031.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 3 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 3 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.

- **Przypadek 11.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 3 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$113000, \quad 110300, \quad 110030, \quad 110003, \quad 101300, \quad 101030,$$
$$101003, \quad 100130, \quad 100103 \quad \text{oraz} \quad 100013.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 3 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.

- **Przypadek 12.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2, są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$122000, \quad 120200, \quad 120020, \quad 120002, \quad 102200, \quad 102020,$$
$$102002, \quad 100220, \quad 100202 \quad \text{oraz} \quad 100022.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{2} = 10$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy dwie cyfry 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 13.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 2, 1 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$121100, \quad 121010, \quad 121001, \quad 120110, \quad 120101, \quad 120011,$$
$$102110, \quad 102101, \quad 102011 \quad \text{oraz} \quad 100211.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{3} = 10$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 2, 1 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2, 1 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.

- **Przypadek 14.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$112100, \quad 112010, \quad 112001, \quad 110210, \quad 110201, \quad 110021,$$
$$101210, \quad 101201, \quad 101021 \quad \text{oraz} \quad 100121.$$

Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{3} = 10$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1, 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1, 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.

- **Przypadek 15.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 10 takich liczb:

$$111200, \quad 111020, \quad 111002, \quad 110120, \quad 110102, \quad 110012,$$
$$101120, \quad 101102, \quad 101012 \quad \text{oraz} \quad 100112.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{5}{3} = 10$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1, 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1, 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 16.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem czterech równych 1, są równe 0. Istnieje 5 takich liczb:

$$111110, \quad 111101, \quad 111011, \quad 110111 \quad \text{oraz} \quad 101111.$$

  Inaczej mówiąc: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1 i wtedy mamy $\binom{5}{4} = 5$ możliwości wyboru czterech miejsc, na których postawimy cztery cyfry 1 (na pozostałym miejscu stawiamy cyfrę 0).

Łącznie mamy zatem $1+5+5+10+5+10+10+10+5+10+10+10+10+10+10+5 = 126$ liczb.

Zadanie 8. Ile jest liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 6?

Rozwiązanie tego zadania pozostawię jako żmudne ćwiczenie. Liczbę 6 można przedstawić w postaci sumy liczb na 32 sposoby. Przeanalizowanie wszystkich powinno dać ostateczny wynik równy 252. W dalszym ciągu zobaczymy metody ogólne, za pomocą których można szybciej otrzymać tę odpowiedź.

Teraz możemy powrócić do zadania 1 i przedstawić jego rozwiązanie.

Rozwiązanie zadania 1. Tak jak w zadaniu 5 mamy 16 sposobów przedstawienia sumy cyfr 5:

- $5 = 5 + 0$,
- $5 = 4 + 1$,
- $5 = 3 + 2$,
- $5 = 3 + 1 + 1$,
- $5 = 2 + 3$,
- $5 = 2 + 2 + 1$,
- $5 = 2 + 1 + 2$,
- $5 = 2 + 1 + 1 + 1$,
- $5 = 1 + 4$,
- $5 = 1 + 3 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 3$,
- $5 = 1 + 2 + 2$,
- $5 = 1 + 2 + 1 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 2 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 1 + 2$,

- $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 16 przypadków. W tych przypadkach skorzystamy z następujących obliczeń:

$$\binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2} = 19 \cdot 9 = 171,$$
$$\binom{19}{3} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{6} = 19 \cdot 3 \cdot 17 = 969,$$
$$\binom{19}{4} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{24} = 19 \cdot 6 \cdot 17 \cdot 2 = 3876.$$

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 5, każda z następnych 19 cyfr jest równa 0. Istnieje tylko jedna taka liczba.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 4, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje 19 takich liczb. Mianowicie na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 4, a następnie mamy 19 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje 19 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy 19 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje 171 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy $\binom{19}{2} = 171$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 5.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 3, są równe 0. Istnieje 19 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy 19 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 6.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 171 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{19}{2} = 171$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 7.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 171 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{19}{2} = 171$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 8.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, są równe 0. Istnieje 969 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{19}{3} = 969$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 9.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 4, są równe 0. Istnieje 19 takich liczb: na pierwszym miejscu

stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy 19 możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 4 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 10.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 3 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 171 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{19}{2} = 171$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 3 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 3 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 11.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 3 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 171 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{19}{2} = 171$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 3 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 12.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2, są równe 0. Istnieje 171 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{19}{2} = 171$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy dwie cyfry 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 13.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 2, 1 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 969 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{19}{3} = 969$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 2, 1 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2, 1 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 14.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 969 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{19}{3} = 969$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1, 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1, 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 15.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje 969 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{19}{3} = 969$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1, 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1, 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 16.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem czterech równych 1, są równe 0. Istnieje 3876 takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1 i wtedy mamy $\binom{19}{4} = 3876$ możliwości wyboru czterech miejsc, na których postawimy cztery cyfry 1 (na pozostałych miejscach stawiamy cyfrę 0).

Łącznie mamy zatem $1+4\cdot 19+6\cdot 171+4\cdot 969+3876 = 1+76+1026+3876+3876 = 8855$ liczb.

W dalszym ciągu spróbujemy uogólnić rozwiązane zadania. Przyjrzyjmy się jednak najpierw otrzymanym wynikom. Popatrzmy zatem jeszcze raz na kilka początkowych wierszy trójkąta Pascala, w którym zostały wytłuszczone wyniki otrzymane w zadaniach od

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
IBE entuzjaści edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

4 do 8:

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad \mathbf{6} \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad \mathbf{21} \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad \mathbf{56} \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad \mathbf{126} \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad \mathbf{252} \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

Zauważamy, że:

- istnieje $\binom{6}{1} = 6$ liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 2,
- istnieje $\binom{7}{2} = 21$ liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 3,
- istnieje $\binom{8}{3} = 56$ liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 4,
- istnieje $\binom{9}{4} = 126$ liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 5,
- istnieje $\binom{10}{5} = 252$ liczb sześciocyfrowych o sumie cyfr równej 6.

Będziemy obliczać, ile jest liczb mających $n+1$ cyfr (tzn. takich, że po pierwszej cyfrze mamy jeszcze n cyfr) i takich, że suma cyfr jest równa 2, 3, 4 lub 5. Sprawdzimy, czy otrzymane wyniki rzeczywiście są współczynnikami dwumianowymi. We wszystkich następnych zadaniach zakładamy, że $n \geq 5$.

Zadanie 9. Ile jest liczb mających $n+1$ cyfr o sumie cyfr równej 2?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 2 możemy uzyskać na dwa sposoby:

- $2 = 2 + 0$,
- $2 = 1 + 1$,

Rozważamy zatem dwa przypadki:

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje $\binom{n}{1} = n$ takich liczb.

Łącznie mamy więc $n + 1 = \binom{n+1}{1}$ liczb mających $n+1$ cyfr o sumie cyfr równej 2.

Zadanie 10. Ile jest liczb mających $n+1$ cyfr o sumie cyfr równej 3?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 3 możemy uzyskać na cztery sposoby:

- $3 = 3 + 0$,
- $3 = 2 + 1$,
- $3 = 1 + 2$,

- $3 = 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 4 przypadki.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

Łącznie mamy zatem

$$1 + n + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2 + 4n + n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}$$

liczb.

Zadanie 11. Ile jest liczb mających $n + 1$ cyfr o sumie cyfr równej 4?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 4 możemy uzyskać na osiem sposobów:

- $4 = 4 + 0$,
- $4 = 3 + 1$,
- $4 = 2 + 2$,
- $4 = 2 + 1 + 1$,
- $4 = 1 + 3$,
- $4 = 1 + 2 + 1$,
- $4 = 1 + 1 + 2$,
- $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 8 przypadków.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 4, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 5.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 3, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 6.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 7.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 8.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

Zatem liczba rozważanych liczb o sumie cyfr równej 4 jest równa:

$$1 + 3n + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{6 + 18n + 9n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{6} =$$
$$= \frac{6 + 18n + 9n^2 - 9n + n^3 - 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6} =$$
$$= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = \binom{n+3}{3}.$$

Zadanie 12. Ile jest liczb mających $n+1$ cyfr o sumie cyfr równej 5?

Rozwiązanie. Sumę cyfr równą 5 możemy uzyskać na 16 sposobów:

- $5 = 5 + 0$,
- $5 = 4 + 1$,
- $5 = 3 + 2$,
- $5 = 3 + 1 + 1$,
- $5 = 2 + 3$,
- $5 = 2 + 2 + 1$,
- $5 = 2 + 1 + 2$,
- $5 = 2 + 1 + 1 + 1$,

- $5 = 1 + 4$,
- $5 = 1 + 3 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 3$,
- $5 = 1 + 2 + 2$,
- $5 = 1 + 2 + 1 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 2 + 1$,
- $5 = 1 + 1 + 1 + 2$,
- $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Mamy zatem 16 przypadków.

- **Przypadek 1.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 5, wszystkie następne są równe 0. Istnieje tylko jedna taka liczba.
- **Przypadek 2.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 4, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 1, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 4, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 3.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 2, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 4.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 3, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 3, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 5.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 3, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 6.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 7.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 8.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 2, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 2, a następnie mamy $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).

- **Przypadek 9.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem jednej równej 4, są równe 0. Istnieje n takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{1} = n$ możliwości wyboru miejsca, na którym postawimy cyfrę 4 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 10.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 3 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 3 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 3 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 11.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 1 i 3 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy cyfry 1 i 3 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1 i 3 stawiamy w tej kolejności na wybranych dwóch miejscach.
- **Przypadek 12.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem dwóch równych 2, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)}{2}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1, a następnie mamy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ możliwości wyboru dwóch miejsc, na których postawimy dwie cyfry 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0).
- **Przypadek 13.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 2, 1 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1 oraz mamy $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 2, 1 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 2, 1 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 14.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, 2 i 1 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1 oraz mamy $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1, 2 i 1 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1, 2 i 1 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 15.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem trzech równych 1, 1 i 2 (w tej kolejności), są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1 oraz mamy $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ możliwości wyboru trzech miejsc, na których postawimy cyfry 1, 1 i 2 (na pozostałych stawiamy cyfrę 0); cyfry 1, 1 i 2 stawiamy w tej kolejności na wybranych trzech miejscach.
- **Przypadek 16.** Pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1, wszystkie następne, z wyjątkiem czterech równych 1, są równe 0. Istnieje $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ takich liczb: na pierwszym miejscu stawiamy cyfrę 1 i wtedy mamy $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ możliwości wyboru czterech miejsc, na których postawimy cztery cyfry 1 (na pozostałych

miejscach stawiamy cyfrę 0).

Zatem liczba rozważanych liczb jest równa:

$$
\begin{aligned}
1 + 4n + 6 \cdot \binom{n}{2} + 4 \cdot \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \\
&= 1 + 4n + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + 72n(n-1) + 16n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + n(n-1)\big(72 + 16(n-2) + (n-2)(n-3)\big)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + n(n-1)(72 + 16n - 32 + n^2 - 5n + 6)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + n(n-1)(n^2 + 11n + 46)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + n(n^3 + 11n^2 + 46n - n^2 - 11n - 46)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + n(n^3 + 10n^2 + 35n - 46)}{24} = \\
&= \frac{24 + 96n + n^4 + 10n^3 + 35n^2 - 46n}{24} = \\
&= \frac{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24}{24}.
\end{aligned}
$$

Z drugiej strony zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) &= (n^2 + 7n + 12)(n^2 + 3n + 2) = \\
&= n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 7n^3 + 21n^2 + 14n + 12n^2 + 36n + 24 = \\
&= n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24.
\end{aligned}
$$

A więc liczba rozważanych liczb jest równa

$$
\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{24} = \binom{n+4}{4}.
$$

Zadanie 13. Ile jest liczb mających $n+1$ cyfr o sumie cyfr równej 6?

Rozwiązanie tego zadania pozostawię jako żmudne ćwiczenie. Liczbę 6 można przedstawić w postaci sumy liczb na 32 sposoby. Przeanalizowanie wszystkich powinno dać ostateczny wynik równy $\binom{n+5}{5}$. Mamy zatem rozsądnie wyglądającą następującą hipotezę.

- Załóżmy, że liczby naturalne m i n spełniają nierówności $1 \le m \le 9$ oraz $m \le n+1$. Wówczas istnieje $\binom{n+m-1}{m-1}$ liczb mających $n+1$ cyfr, w których suma cyfr jest równa m.

W dalszym ciągu zobaczymy metody ogólne, za pomocą których można udowodnić powyższą hipotezę. Najpierw jednak zajmiemy się rozwiązaniem zadań 2 i 3. Przypomnijmy treść zadania 2.

Zadanie 2. Oblicz, ile jest liczb dwudziestocyfrowych spełniających jednocześnie następujące trzy warunki:

- w rozważanych liczbach występują wyłącznie cyfry 1, 2 i 3,
- każda cyfra 1, 2 i 3 występuje co najmniej jeden raz,
- cyfry występują w rozważanej liczbie w kolejności niemalejącej, tzn. wszystkie cyfry 1 występują przed wszystkimi cyframi 2 i 3 oraz wszystkie cyfry 2 występują przed wszystkimi cyframi 3.

Przykładowe takie liczby:

$$11111122223333333333, \quad 12222222222222222223, 11111111111111111123.$$

Rozwiązanie. Sposób I. Najbardziej naturalny sposób rozwiązania tego zadania polega na rozpatrzeniu 18 przypadków w zależności od liczby jedynek występujących w rozważanej liczbie. Przypuśćmy zatem, że liczba k spełnia nierówności $1 \leq k \leq 18$. Policzmy, ile jest rozważanych liczb dwudziestocyfrowych, w których występuje dokładnie k jedynek. Mamy wówczas $20 - k$ pozostałych cyfr. Co najmniej jedna z nich jest dwójką i co najmniej jedna jest trójką. Mamy zatem $20 - k - 1 = 19 - k$ możliwych liczb, zawierających od jednej do $19 - k$ dwójek. Teraz z reguły dodawania wynika, że 18 otrzymanych liczb (dla k od 1 do 18) należy dodać. Mamy zatem

$$(19-1)+(19-2)+\ldots+(19-17)+(19-18) = 18+17+\ldots+2+1 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$$

liczb.

Zauważmy, że otrzymany wynik można zapisać za pomocą współczynnika dwumianowego:

$$\frac{18 \cdot 19}{2} = \binom{19}{2}.$$

Zobaczymy, że nie jest to przypadek.

Rozwiązanie. Sposób II. Każdą liczbę spełniającą warunki zadania zakodujemy za pomocą 20 kropek i 2 pionowych kresek. Każda kropka znajdująca się przed pierwszą kreską oznacza cyfrę 1, każda kropka znajdująca się między kreskami oznacza cyfrę 2, wreszcie każda kropka znajdująca się za drugą kreską oznacza cyfrę 3. Trzy przykładowe liczby zostaną zatem zakodowane w następujący sposób:

11111122223333333333 — ● ● ● ● ● ● | ● ● ● ● | ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
12222222222222222223 — ● | ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● | ●
11111111111111111123 — ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● | ● | ●

Ponieważ w rozważanych liczbach muszą wystąpić wszystkie trzy cyfry (1, 2 i 3), więc kreski oddzielające kropki muszą znajdować się w 19 przerwach między kropkami. Pierwsza kreska nie może bowiem znaleźć się przed pierwszą kropką, obie kreski nie mogą wystąpić obok siebie i wreszcie druga kreska nie może wystąpić za ostatnią kropką. Mamy zatem 19 przerw między kropkami — możemy w nie wstawić dwie kreski na $\binom{19}{2}$ sposobów.

Zadanie 2 można uogólnić w następujący sposób.

Zadanie 2a. Dane są liczby naturalne m i n takie, że $m \leq n$. Udowodnij, że istnieje dokładnie $\binom{n-1}{m-1}$ ciągów długości n o następujących własnościach:

- wyrazami ciągów są liczby naturalne z przedziału od 1 do m,
- w każdym ciągu wyrazy występują w kolejności niemalejącej,
- każda liczba naturalna z przedziału od 1 do m występuje w ciągu co najmniej jeden raz.

Rozwiązanie. Ciągi kodujemy za pomocą n kropek i $m-1$ kresek. Kreski mogą znajdować się wyłącznie w przerwach między kropkami i nie mogą dwie kreski znaleźć się w tej samej przerwie. Mamy zatem $n-1$ przerw, w których musimy umieścić $m-1$ kresek. Te przerwy, w których znajdują się kreski możemy wybrać właśnie na $\binom{n-1}{m-1}$ sposobów.

Zadanie 3. Oblicz, ile jest liczb dwudziestocyfrowych spełniających jednocześnie następujące dwa warunki:

- w rozważanych liczbach występują wyłącznie cyfry 1, 2 i 3,
- cyfry występują w rozważanej liczbie w kolejności niemalejącej, tzn. wszystkie cyfry 1 występują przed wszystkimi cyframi 2 i 3 oraz wszystkie cyfry 2 występują przed wszystkimi cyframi 3.

Przykładowe takie liczby (oprócz trzech przykładowych liczb pokazanych w zadaniu 2):

$$11111111111111111111, 11111111113333333333, 22222222222222222223.$$

Rozwiązanie. Tym razem kodujemy liczby za pomocą 20 kropek i dwóch kresek bez żadnych ograniczeń. Jeśli kreski znajdą się obok siebie, to znaczy, że w kodowanej liczbie nie występuje cyfra 2. Jeśli pierwsza kreska znajdzie się na początku kodu, to znaczy, że w kodowanej liczbie nie występuje cyfra 1. Wreszcie, jeśli druga kreska znajdzie się na końcu kodu, to znaczy, że w kodowanej liczbie nie występuje cyfra 3. Trzy przykładowe liczby z treści zadania zostaną zakodowane w następujący sposób:

11111111111111111111 – • | |
11111111113333333333 – • • • • • • • • • • | | • • • • • • • • • •
22222222222222222223 – | • • • • • • • • • • • • • • • • • • • | •

Mamy zatem łącznie 22 znaki: 20 kropek i 2 kreski. Miejsca (licząc od lewej strony), na których mogą wystąpić dwie kreski, wybieramy spośród 22 możliwości na $\binom{22}{2}$ sposobów. Zatem liczba rozważanych liczb jest równa

$$\binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{2} = 11 \cdot 21 = 231.$$

Zadanie 3 także możemy uogólnić.

Zadanie 3a. Dane są dwie liczby naturalne m i n. Udowodnij, że istnieje dokładnie $\binom{n+m-1}{m-1}$ ciągów długości n o następujących własnościach:

- wyrazami ciągów są liczby naturalne z przedziału od 1 do m,
- w każdym ciągu wyrazy występują w kolejności niemalejącej.

Rozwiązanie. Ciągi kodujemy za pomocą n kropek i $m-1$ kresek. Kropki i kreski mogą występować w dowolnej kolejności. Kropki występujące przed pierwszą kreską kodują wyrazy ciągu równe 1; jeśli takich kropek nie ma w kodzie, to znaczy, że w ciągu nie ma wyrazów równych 1. Kropki znajdujące się między pierwszą i drugą kreską kodują wyrazy równe 2; jeśli pierwsze dwie kreski występują obok siebie, to znaczy, że w ciągu nie ma wyrazów równych 2 i tak dalej. Wreszcie kropki znajdujące się za ostatnią kreską kodują wyrazy ciągu równe m; jeśli takich kropek nie ma, to znaczy, że w ciągu nie ma wyrazów równych m. Kod składa się zatem z $n+m-1$ znaków: n kropek i $m-1$ kresek. Miejsca w tym ciągu znaków, na których może się znajdować $m-1$ kresek, można wybrać spośród $n+m-1$ miejsc na $\binom{n+m-1}{m-1}$ sposobów. To kończy rozwiązanie zadania.

Powróćmy teraz do zadania 1. Przypomnijmy jego treść.

Zadanie 1. Ile jest liczb dwudziestocyfrowych o sumie cyfr równej 5?

Rozwiązanie. Każdą z rozważanych liczb kodujemy za pomocą 5 kropek i 19 kresek. Liczba kropek przed pierwszą kreską jest równa pierwszej cyfrze kodowanej liczby. Liczba kropek między pierwszą i drugą kreską jest równa drugiej cyfrze kodowanej liczby. I tak dalej aż do ostatniej kreski. Liczba kropek za ostatnią kreską jest równa ostatniej cyfrze kodowanej liczby. Widzimy, że istnieje tylko jedno ograniczenie na rozmieszczenie kropek i kresek: kod nie może się zacząć od kreski, bo pierwsza cyfra nie może być zerem. Kod zaczyna się zatem od kropki, potem mamy 23 znaki: 4 kropki i 19 kresek, występujących w dowolnej kolejności. Tak jak w zadaniu 3 mamy

$$\binom{23}{4} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{24} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 = 8855$$

kodów, a więc tyle jest liczb spełniających warunki zadania 1.

Zadanie 1 można uogólnić.

Zadanie 1a. Dane są dwie liczby naturalne m i n takie, że $1 \le m \le n+1$. Udowodnij, że istnieje dokładnie $\binom{m+n-1}{m-1}$ ciągów długości $n+1$, spełniających następujące warunki:

- wszystkie wyrazy ciągu są liczbami całkowitymi nieujemnymi,
- suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa m.

Rozwiązanie. Każdy taki ciąg kodujemy za pomocą m kropek i n kresek. Jest tylko jedno ograniczenie: kod nie może rozpoczynać się kreską. Mamy zatem kropkę na pierwszym miejscu, po której następuje $m+n-1$ znaków: n kresek i $m-1$ kropek. Taki kod możemy utworzyć na $\binom{n+m-1}{m-1}$ sposobów. To kończy rozwiązanie zadania.

Dla $m \le 9$ mamy oczywiście dowód sformułowanej wyżej hipotezy.

- Załóżmy, że liczby naturalne m i n spełniają nierówności $1 \le m \le 9$ oraz $m \le n+1$. Wówczas stnieje $\binom{n+m-1}{m-1}$ liczb mających $n+1$ cyfr, w których suma cyfr jest równa m.