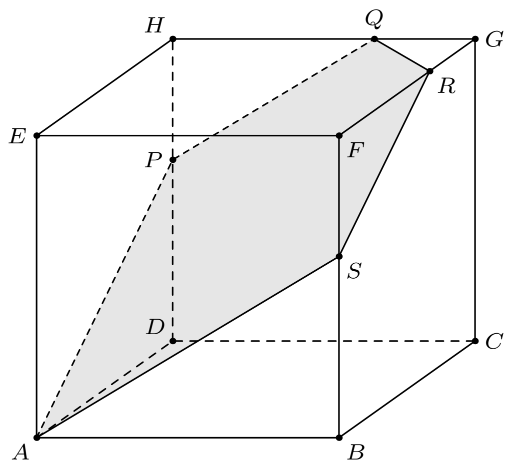
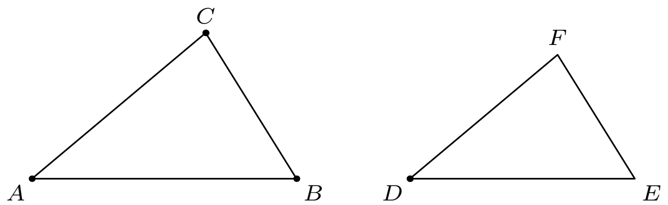
Zadanie 30. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy, że $HQ = FR = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



Rozwiązanie podobnych zadań przestrzennych będzie się sprowadzało do rozwiązania kilku zadań dotyczących poszczególnych płaszczyzn. W rozwiązaniu będziemy korzystać z podobieństwa trójkątów prostokątnych. Przypomnijmy najpierw, że dwa trójkąty ABC i DEF



nazywamy podobnymi (przy odpowiedniości wierzchołków: wierzchołek A pierwszego trójkąta odpowiada wierzchołkowi D drugiego trójkąta, wierzchołek B odpowiada wierzchołkowi E i wierzchołek C odpowiada wierzchołkowi F), jeśli zachodzą następujące dwa warunki:

(1) odpowiadające sobie kąty obu trójkątów są równe, tzn.

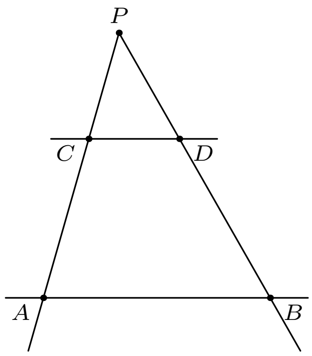
$$\measuredangle BAC = \measuredangle EDF, \quad \measuredangle ABC = \measuredangle DEF \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ACB = \measuredangle DFE,$$

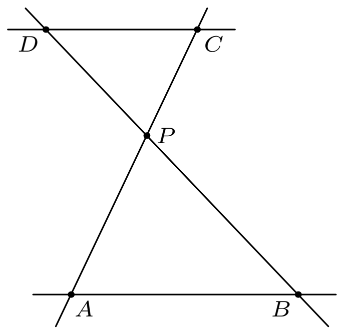
(2) odpowiadające sobie boki obu trójkątów są proporcjonalne, tzn.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Podobnie jak to miało miejsce w przypadku przystawania trójkątów, nie musimy sprawdzać wszystkich warunków, by przekonać się, że dwa trójkąty są podobne. Istnieją bowiem trzy **cechy podobieństwa** trójkątów; w każdej z nich wystarczy sprawdzić tylko niektóre z powyższych równości. W rozwiązaniu naszego zadania nie będziemy jednak korzystać z tych cech podobieństwa (i dlatego nie będę ich tu formułował). Skorzystamy z twierdzenia ukazującego dwie sytuacje, w których istnieją trójkąty podobne. Oto to twierdzenie.

Twierdzenie 1. Przypuśćmy, że mamy dane dwie proste przecinające się w punkcie P, przecięte dwiema prostymi równoległymi. Możliwe są dwie sytuacje, zilustrowane na poniższym rysunku:





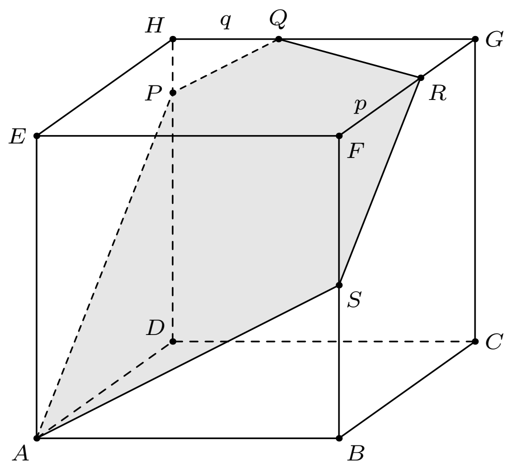
W pierwszej z nich mamy dwie półproste PA i PB oraz punkty C i D leżące odpowiednio na półprostych PA i PB. Zakładamy przy tym, że proste AB i CD są równoległe (zobacz rysunek po lewej stronie). W drugiej z nich proste AC i BD przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz odcinków AC i BD. Znów zakładamy, że proste AB i CD są równoległe (zobacz rysunek po prawej stronie). W obu sytuacjach trójkąty PAB i PCD są podobne.

W rozwiązaniu zadania 30 skorzystamy z tego, że w obu powyższych sytuacjach zachodzą równości

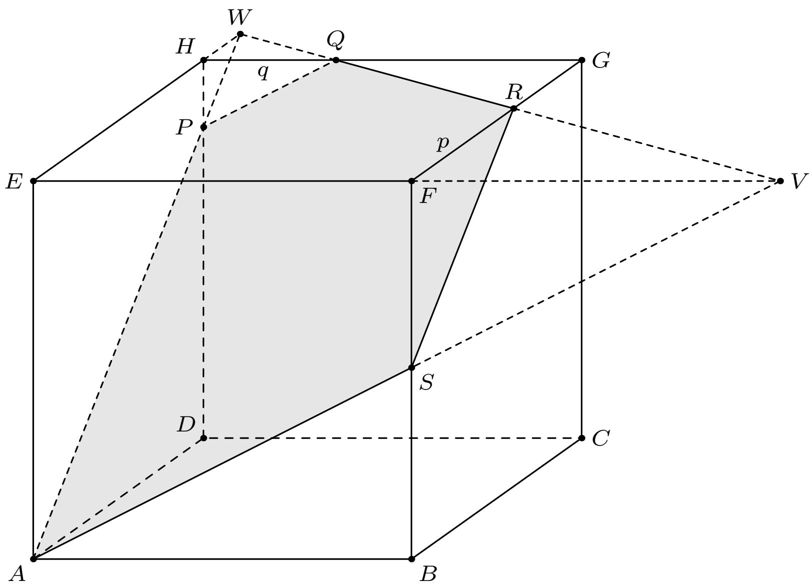
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD}.$$

Po tym wstępie przejdziemy do rozwiązania zadania 30. Rozwiążemy je jednak od razu w postaci ogólnej.

Zadanie 30a. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 1. Punkty Q i R leżą odpowiednio na krawędziach HG i FG, przy czym $FR = p$ oraz $HQ = q$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



Rozwiązanie. Niech punkt V będzie punktem przecięcia prostej QR z prostą EF i niech punkt W będzie punktem przecięcia prostej QR z prostą EH. Te punkty przecięcia naprawdę istnieją, gdyż proste QR, EF i EH leżą w jednej płaszczyźnie (jest to płaszczyzna górnej ściany sześcianu) i nie są równoległe. Niech następnie punkt P będzie punktem przecięcia prostej AW z prostą DH (obie proste leżą w płaszczyźnie lewej ściany sześcianu, tzn. ściany $ADHE$). Niech wreszcie punkt S będzie punktem przecięcia prostej AV z prostą BF (obie proste leżą w płaszczyźnie prawej ściany sześcianu, tzn. ściany $BCGF$).



Popatrzmy na płaszczyznę górnej ściany sześcianu. Zauważamy, że trójkąty QGR i VFR są podobne. Zatem

$$\frac{VF}{QG} = \frac{FR}{GR},$$

czyli

$$VF = \frac{FR \cdot QG}{GR} = \frac{p(1-q)}{1-p}.$$

Teraz popatrzmy na płaszczyznę przedniej ściany sześcianu. Zauważamy, że trójkąty VSF i ABS są podobne. Zatem

$$\frac{FS}{BS} = \frac{FV}{AB}.$$

Przyjmijmy, że $BS = x$. Wtedy $FS = 1 - x$. Zatem

$$\frac{1-x}{x} = \frac{p(1-q)}{1-p},$$

czyli

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{p(1-q)}{1-p}.$$

Stąd wynika, że
$$\frac{1}{x}=\frac{p(1-q)}{1-p}+1=\frac{p-pq+1-p}{1-p}=\frac{1-pq}{1-p}.$$
Zatem
$$BS=x=\frac{1-p}{1-pq}.$$
Jeszcze raz popatrzmy na płaszczyznę górnej ściany sześcianu. Tym razem zauważamy, że trójkąty RGQ i WHQ są podobne. Zatem
$$\frac{WH}{RG}=\frac{HQ}{GQ},$$
czyli
$$WH=\frac{HQ\cdot RG}{GR}=\frac{q(1-p)}{1-q}.$$
Teraz popatrzmy na płaszczyznę lewej ściany sześcianu. Zauważamy, że trójkąty WHP i ADP są podobne. Zatem
$$\frac{HP}{DP}=\frac{WH}{AD}.$$
Przyjmijmy $DP=y$. Wtedy $HP=1-y$. Zatem
$$\frac{1-y}{y}=\frac{q(1-p)}{1-q},$$
czyli
$$\frac{1}{y}-1=\frac{q(1-p)}{1-q}.$$
Stąd wynika, że
$$\frac{1}{y}=\frac{q(1-p)}{1-q}+1=\frac{q-pq+1-q}{1-q}=\frac{1-pq}{1-q}.$$
Zatem
$$DP=y=\frac{1-q}{1-pq}.$$
To kończy rozwiązanie zadania.

Popatrzmy teraz na kilka szczególnych przypadków tego zadania.

- Jeśli $p=q=\frac{2}{3}$, to
$$BS=DP=\frac{1-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}.$$
- Jeśli $p=q=\frac{1}{2}$, to
$$BS=DP=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

- Jeśli $p = q = \frac{1}{3}$, to

$$BS = DP = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

- Jeśli $p = \frac{1}{2}$ oraz $q = \frac{2}{3}$, to

$$BS = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \quad \text{oraz} \quad DP = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

- Jeśli $p = \frac{1}{2}$ oraz $q = \frac{1}{3}$, to

$$BS = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{3}{5} \quad \text{oraz} \quad DP = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{4}{5}.$$

- Jeśli $p = \frac{1}{3}$ oraz $q = \frac{2}{3}$, to

$$BS = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{6}{7} \quad \text{oraz} \quad DP = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{3}{7}.$$