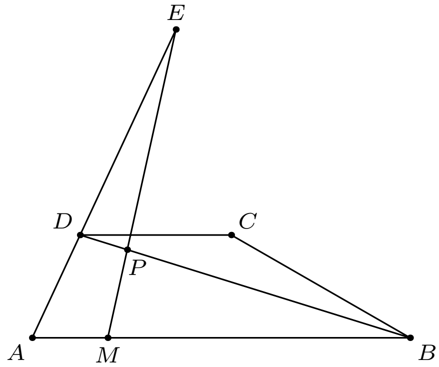
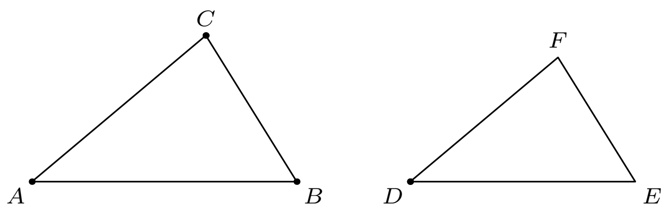
Zadanie 19. Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $AE = 3 \cdot AD$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $MB = 4 \cdot AM$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $BP = 6 \cdot PD$.

Podstawowym pojęciem wykorzystywanym w rozwiązaniu tego zadania jest pojęcie podobieństwa trójkątów. Przypomnijmy najpierw, że dwa trójkąty ABC i DEF



nazywamy podobnymi (przy odpowiedniości wierzchołków: wierzchołek A pierwszego trójkąta odpowiada wierzchołkowi D drugiego trójkąta, wierzchołek B odpowiada wierzchołkowi E i wierzchołek C odpowiada wierzchołkowi F), jeśli zachodzą następujące dwa warunki:

(1) odpowiadające sobie kąty obu trójkątów są równe, tzn.

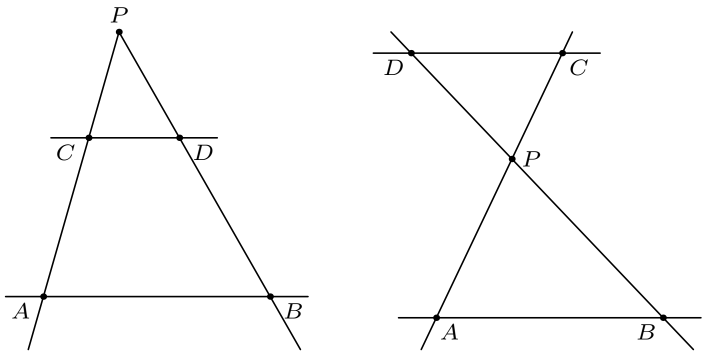
$$\measuredangle BAC = \measuredangle EDF, \quad \measuredangle ABC = \measuredangle DEF \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ACB = \measuredangle DFE,$$

(2) odpowiadające sobie boki obu trójkątów są proporcjonalne, tzn.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Podobnie jak to miało miejsce w przypadku przystawania trójkątów, nie musimy sprawdzać wszystkich warunków, by przekonać się, że dwa trójkąty są podobne. Istnieją bowiem trzy **cechy podobieństwa** trójkątów; w każdej z nich wystarczy sprawdzić tylko niektóre z powyższych równości. W rozwiązaniu naszego zadania nie będziemy jednak korzystać z tych cech podobieństwa (i dlatego nie będę ich tu formułował). Skorzystamy z twierdzenia ukazującego dwie sytuacje, w których istnieją trójkąty podobne. Oto to twierdzenie.

Twierdzenie 1. Przypuśćmy, że mamy dane dwie proste przecinające się w punkcie P przecięte dwiema prostymi równoległymi. Możliwe są dwie sytuacje zilustrowane na poniższym rysunku:



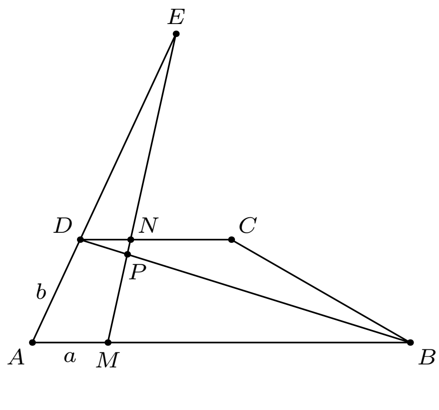
W pierwszej z nich mamy dwie półproste PA i PB oraz punkty C i D leżące odpowiednio na półprostych PA i PB. Zakładamy przy tym, że proste AB i CD są równoległe (zobacz rysunek po lewej stronie). W drugiej z nich proste AC i BD przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz odcinków AC i BD. Znów zakładamy, że proste AB i CD są równoległe (zobacz rysunek po prawej stronie). W obu sytuacjach trójkąty PAB i PCD są podobne.

W rozwiązaniu zadania 19 skorzystamy z tego, że w obu powyższych sytuacjach zachodzą równości

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD}.$$

Po tym wstępie przejdziemy do rozwiązania zadania 19.

Rozwiązanie. Sposób I. Niech N będzie punktem przecięcia odcinka EM z prostą CD. Oznaczmy następnie $a = AM$ oraz $b = AD$.



Wówczas

$$BM = 4a, \quad AE = 3b \quad \text{oraz} \quad DE = 2b.$$

Następnie zauważmy, że trójkąty EAM i EDN są podobne (jest to pierwsza z opisanych wyżej sytuacji). Mamy więc równość

$$\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AE} = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3}.$$

Stąd dostajemy

$$DN = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3}a.$$

Następnie zauważamy, że trójkąty PMB i PND są podobne (jest to druga z opisanych wyżej sytuacji). Mamy zatem równość

$$\frac{BP}{DP} = \frac{BM}{DN} = \frac{4a}{\frac{2}{3}a} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6.$$

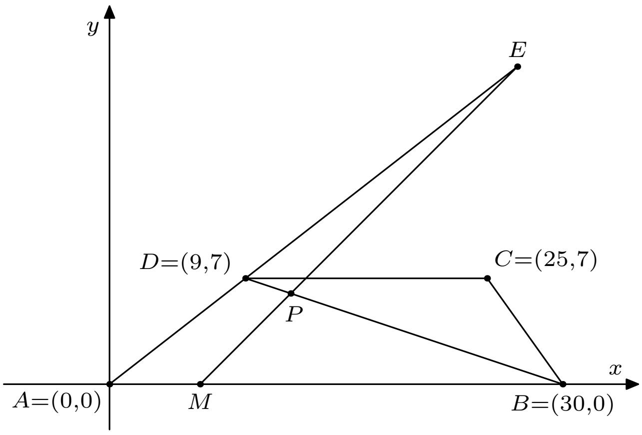
Stąd wynika, że $BP = 6 \cdot DP$, co kończy dowód.

Nasze zadanie można także rozwiązać metodami geometrii analitycznej. Wiele osób (zwłaszcza uczniów) może zaskakiwać to, że geometria analityczna służy nie tylko do obliczeń geometrycznych, ale może też być wykorzystana do dowodzenia twierdzeń. Zanim zobaczymy taki dowód twierdzenia sformułowanego w zadaniu 19, popatrzmy na zadanie, które pokazuje główny pomysł takiego rozumowania.

Zadanie 19a. Dany jest trapez $ABCD$, w którym:

$$A = (0,0), \quad B = (30,0), \quad C = (25,7) \quad \text{oraz} \quad D = (9,7).$$

Punkt M leży na podstawie AB trapezu oraz $MB = 4 \cdot AM$. Punkt E leży na półprostej AD oraz $AE = 3 \cdot AD$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).

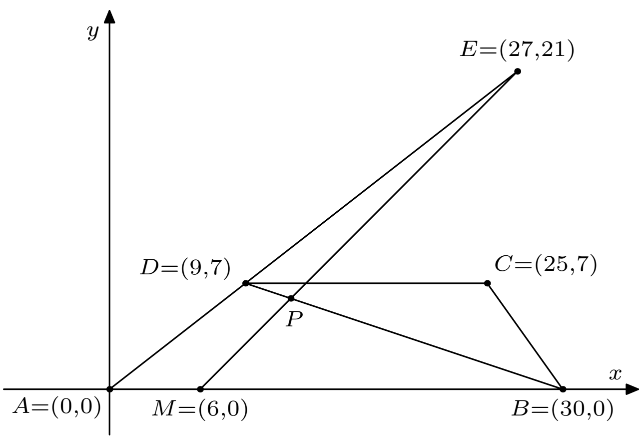


Udowodnij, że $BP = 6 \cdot PD$.

Rozwiązanie. Najpierw musimy obliczyć współrzędne punktów M i E. Skorzystamy z następującej prostej obserwacji. Przypuśćmy, że mamy dany punkt $A = (0,0)$ oraz dowolny punkt $X = (a,b)$. Przypuśćmy następnie, że punkt Y leży na półprostej AX oraz $AY = t \cdot AX$ dla pewnej liczby rzeczywistej t. Wówczas punkt Y ma następujące współrzędne:

$$Y = (t \cdot a, t \cdot b).$$

Z taką sytuacją mamy do czynienia w naszym zadaniu dwukrotnie. Punkt M leży na półprostej AB oraz $AM = \frac{1}{5} \cdot AB$. Zatem $M = (6,0)$. Punkt E leży natomiast na półprostej AD oraz $AE = 3 \cdot AD$. Zatem $E = (27, 21)$. Widzimy to na rysunku:



Teraz wyznaczamy równanie prostej BD. Ma ono postać kierunkową

$$y = kx + l$$

dla pewnych k i l. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktów B i D w miejsce zmiennych x i y, otrzymując następujący układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 30 + l, \\ 7 = k \cdot 9 + l. \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego, otrzymując równanie z jedną niewiadomą k:

$$21k = -7,$$

którego rozwiązaniem jest $k = -\frac{1}{3}$. Z pierwszego równania otrzymujemy wtedy $l = 10$. Prosta BD ma zatem równanie

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + 10.$$

Następnie wyznaczamy równanie prostej EM. Znów ma ono postać kierunkową

$$y = kx + l$$

dla pewnych k i l. Tym razem podstawiamy do tego równania współrzędne punktów E i M, otrzymując układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} 21 = k \cdot 27 + l, \\ 0 = k \cdot 6 + l. \end{cases}$$

Znów odejmujemy drugie równanie od pierwszego, otrzymując równanie

$$21k = 21,$$

którego rozwiązaniem jest $k = 1$. Z równania drugiego otrzymujemy teraz $l = -6$. Zatem prosta EM ma równanie

$$y = x - 6.$$

Wreszcie obliczamy współrzędne punktu P. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 10, \\ y = x - 6. \end{cases}$$

Ponieważ lewe strony obu równań są równe, więc i prawe są równe; zatem otrzymujemy następujące równanie z niewiadomą x:

$$-\frac{1}{3}x + 10 = x - 6.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x = 12$. Z równania $y = x - 6$ otrzymujemy teraz $y = 6$. Zatem punkt P ma współrzędne $P = (12, 6)$. Wreszcie wykazujemy, że $BP = 6 \cdot PD$. W tym celu obliczamy długości odcinków BP i PD:

$$PD = \sqrt{(12-9)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$BP = \sqrt{(30-12)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{324 + 36} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} = 6 \cdot PD.$$

To kończy dowód.

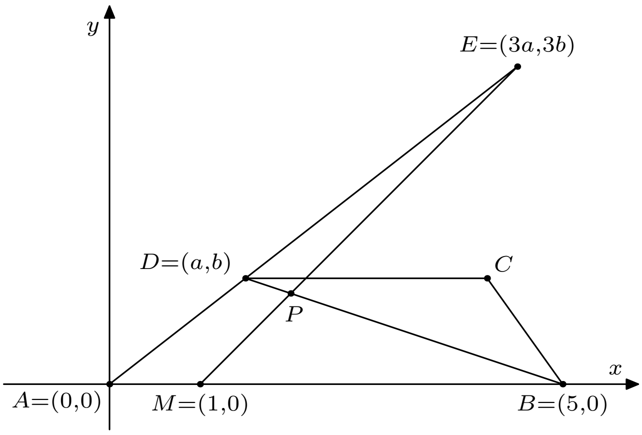
Oczywiście to zadanie nie rozwiązuje naszego podstawowego zadania w pełni. Pokazuje ono bowiem tylko to, że dla jednego konkretnego trapezu (dokładniej: dla wszystkich podobnych do niego) teza twierdzenia zachodzi. Twierdzenie zostanie udowodnione w całej ogólności, gdy przeprowadzimy analogiczne rozumowanie dla dowolnego trapezu. Zauważmy na początku, że wierzchołek C nie odgrywa żadnej roli w całym rozumowaniu. Istotne są tylko wierzchołki A, B i D. Rozumowanie ogólne składa się z dwóch kroków. Pierwszy polega na wybraniu odpowiedniego układu współrzędnych (tzn. osi współrzędnych i jednostki na osiach). Drugi krok będzie polegał na przeprowadzeniu obliczeń analogicznych do obliczeń w zadaniu 19a. Spróbujmy to zrobić.

Rozwiązanie zadania 19. Sposób II. Najpierw musimy wybrać odpowiedni układ współrzędnych. Możemy umieścić początek układu w dowolnym punkcie; ze względu na obserwację, od której zaczęliśmy rozwiązanie zadania 19a, rozsądne jest umieszczenie początku układu w punkcie A. Następnie możemy poprowadzić oś Ox przez dowolny punkt różny od A; wybór osi Ox wyznaczy jednoznacznie oś Oy. Spróbujmy poprowadzić oś Ox tak jak w zadaniu 19a, to znaczy tak, by punkt B leżał na jej dodatniej półosi. Następnie możemy dowolnie dobrać jednostkę. Przyjmijmy ją tak, by $M = (1, 0)$. Wtedy $B = (5, 0)$. Teraz bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt D leży powyżej osi Ox, to znaczy $D = (a, b)$, gdzie $b > 0$. Mianowicie punkt D nie może leżeć na prostej AB, więc $b \neq 0$. Gdyby $b < 0$, to moglibyśmy odbić nasz trapez symetrycznie względem osi Ox i udowodnić twierdzenie dla tego odbicia symetrycznego. Wreszcie zauważamy, że $E = (3a, 3b)$. W ten sposób otrzymujemy następujące zadanie.

Zadanie 19b. Dany jest trapez $ABCD$, w którym:

$$A = (0, 0), \quad B = (5, 0) \quad \text{oraz} \quad D = (a, b),$$

gdzie $b > 0$ (współrzędne punktu C nie będą miały żadnego znaczenia). Punkt M leży na podstawie AB trapezu oraz $M = (1, 0)$. Punkt E leży na półprostej AD oraz $E = (3a, 3b)$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $BP = 6 \cdot PD$.

Rozwiązanie. Znamy już współrzędne wszystkich punktów, więc możemy przystąpić do wyznaczania równań prostych BD i EM. Zaczniemy od prostej BD. Zapiszmy, tak jak poprzednio, to równanie w postaci kierunkowej:

$$y = kx + l$$

dla pewnych k i l. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktów B i D, otrzymując układ równań z niewiadomymi k i l (zmienne a i b traktujemy jako znane parametry; chcemy udowodnić tezę twierdzenia dla dowolnych a i b takich, że $b > 0$):

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 5 + l, \\ b = k \cdot a + l. \end{cases}$$

Tym razem odejmujemy pierwsze równanie od drugiego, otrzymując równanie z jedną niewiadomą k:

$$(a - 5) \cdot k = b.$$

W tym momencie dostrzegamy pewną trudność. Równanie nie ma rozwiązania dla $a = 5$: po lewej stronie równania mamy zero, po prawej liczbę dodatnią b. Co się stało?

Otóż dla $a = 5$ prosta BD nie ma równania w postaci kierunkowej, gdyż jest równoległa do osi Oy. Podobna trudność powstanie przy wyznaczaniu równania prostej EM. Zapiszmy to równanie w postaci kierunkowej

$$y = kx + l$$

dla pewnych k i l. Następnie podstawmy do tego równania współrzędne punktów E i M, otrzymując układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} 3b = k \cdot 3a + l, \\ 0 = k \cdot 1 + l. \end{cases}$$

Odejmujemy drugie równanie od pierwszego, otrzymując równanie z jedną niewiadomą k:

$$(3a-1)\cdot k = 3b.$$

Tym razem jeśli $3a = 1$, to równanie nie ma rozwiązania. Jest tak dlatego, że dla $a = \frac{1}{3}$ prosta EM nie ma równania kierunkowego. Jest bowiem równoległa do osi Oy. Jeśli zatem chcemy kontynuować nasze rozwiązanie, to będziemy musieli podzielić je na trzy przypadki.

Przypadek 1. Liczba a jest taka, że $a \neq 5$ oraz $a \neq \frac{1}{3}$.

W tym przypadku obie proste BD i EM mają równania kierunkowe. W przypadku prostej BD mamy

$$k = \frac{b}{a-5} \quad \text{oraz} \quad l = -5k = -\frac{5b}{a-5}.$$

Zatem równanie prostej BD ma postać

$$y = \frac{b}{a-5}\cdot x - \frac{5b}{a-5}.$$

W przypadku prostej EM mamy

$$k = \frac{3b}{3a-1} \quad \text{oraz} \quad l = -k = -\frac{3b}{3a-1}.$$

Zatem równanie prostej EM ma postać

$$y = \frac{3b}{3a-1}\cdot x - \frac{3b}{3a-1}.$$

Teraz znajdujemy współrzędne punktu P. W tym celu rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a-5}\cdot x - \dfrac{5b}{a-5}, \\[2mm] y = \dfrac{3b}{3a-1}\cdot x - \dfrac{3b}{3a-1}. \end{cases}$$

Znów lewe strony równań są równe, więc równe są też i prawe strony:

$$\frac{b}{a-5}\cdot x - \frac{5b}{a-5} = \frac{3b}{3a-1}\cdot x - \frac{3b}{3a-1}.$$

Przekształcamy otrzymane równanie w sposób równoważny:

$$\frac{bx-5b}{a-5} = \frac{3bx-3b}{3a-1},$$
$$\frac{b(x-5)}{a-5} = \frac{3b(x-1)}{3a-1},$$
$$\frac{x-5}{a-5} = \frac{3x-3}{3a-1},$$

$$\begin{aligned}
(x-5)(3a-1) &= (3x-3)(a-5),\\
3ax - x - 15a + 5 &= 3ax - 15x - 3a + 15,\\
-x - 15a + 5 &= -15x - 3a + 15,\\
14x &= 12a + 10,\\
7x &= 6a + 5,\\
x &= \frac{6a+5}{7}.
\end{aligned}$$

Następnie obliczamy y (korzystając z tego, że $a \neq 5$):

$$\begin{aligned}
y &= \frac{b}{a-5}\cdot x - \frac{5b}{a-5} = \frac{b}{a-5}\cdot\frac{6a+5}{7} - \frac{5b}{a-5} = \frac{b(6a+5)}{7(a-5)} - \frac{35b}{7(a-50} =\\
&= \frac{6ab-30b}{7(a-5)} = \frac{6b(a-5)}{7(a-5)} = \frac{6b}{7}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$P = \left(\frac{6a+5}{7}, \frac{6b}{7}\right).$$

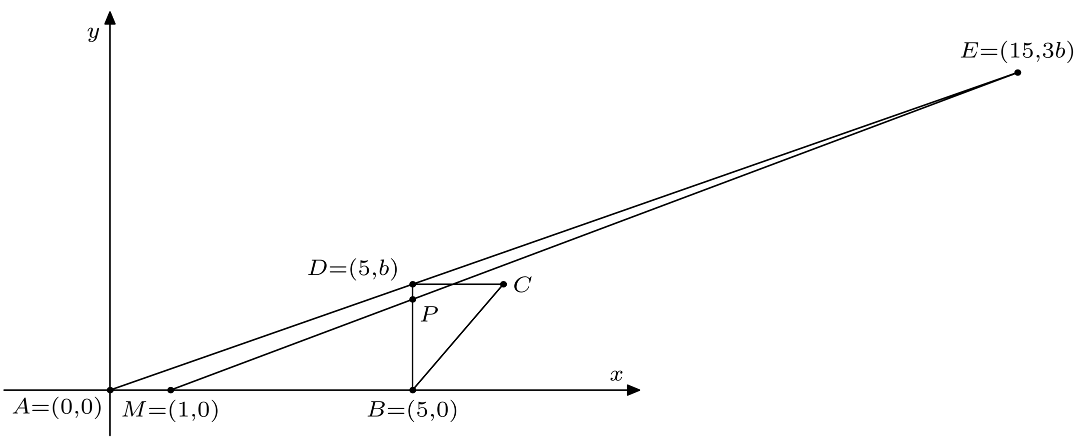
Wreszcie dowodzimy, że $BP = 6\cdot PD$.

$$\begin{aligned}
PD &= \sqrt{\left(\frac{6a+5}{7}-a\right)^2 + \left(\frac{6b}{7}-b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-a+5}{7}\right)^2 + \left(\frac{-b}{7}\right)^2} =\\
&= \frac{1}{7}\cdot\sqrt{(a-5)^2+b^2},\\
BP &= \sqrt{\left(\frac{6a+5}{7}-5\right)^2 + \left(\frac{6b}{7}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6a-30}{7}\right)^2 + \left(\frac{6b}{7}\right)^2} =\\
&= \frac{1}{7}\cdot\sqrt{(6a-30)^2+(6b)^2} = \frac{6}{7}\cdot\sqrt{(a-6)^2+b^2} = 6\cdot PD.
\end{aligned}$$

W tym przypadku dowód jest więc zakończony.

Przypadek 2. $a = 5$.

W tym przypadku mamy $D = (5, b)$ oraz $E = (15, 3b)$.



Prosta DE ma równanie $x = 5$. Równanie prostej EM wyznaczamy tak jak w poprzednim przypadku. Do równania kierunkowego

$$y = kx + l$$

podstawiamy w miejsce zmiennych x i y współrzędne punktów E i M:

$$\begin{cases} 3b = k \cdot 15 + l, \\ 0 = k \cdot 1 + l. \end{cases}$$

Odejmujemy drugie równanie od pierwszego, otrzymując równanie z jedną niewiadomą k:

$$3b = 14k,$$

którego rozwiązaniem jest $k = \frac{3}{14}b$. Z drugiego równania dostajemy $l = -k = -\frac{3}{14}b$. Ostatecznie równanie prostej EM ma postać

$$y = \frac{3b}{14} \cdot x - \frac{3b}{14}.$$

Pierwsza współrzędna punktu P jest oczywiście równa 5. Drugą współrzędną obliczamy podstawiając $x = 5$ do równania prostej EM:

$$y = \frac{3b}{14} \cdot 5 - \frac{3b}{14} = \frac{3b}{14} \cdot 4 = \frac{6b}{7}.$$

Zatem punkt P ma współrzędne

$$P = \left(5, \frac{6b}{7}\right).$$

Wreszcie dowodzimy, że $BP = 6 \cdot PD$. Mamy:

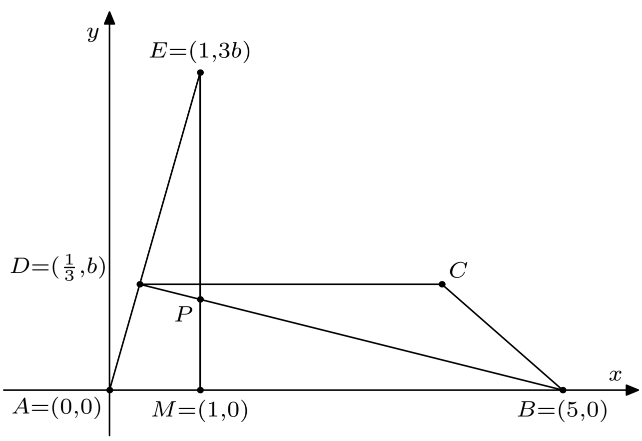
$$PD = b - \frac{6b}{7} = \frac{b}{7},$$

$$BP = \frac{6b}{7} - 0 = \frac{6b}{7} = 6 \cdot PD.$$

To kończy dowód w tym przypadku.

Przypadek 3. $a = \frac{1}{3}$.

W tym przypadku mamy $D = \left(\frac{1}{3}, b\right)$ oraz $E = (1, 3b)$.



Prosta EM ma równanie $x = 1$. Równanie prostej BD wyznaczamy tak jak w przypadku pierwszym. Do równania kierunkowego

$$y = kx + l$$

podstawiamy w miejsce zmiennych x i y współrzędne punktów B i D:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 5 + l, \\ b = k \cdot \frac{1}{3} + l. \end{cases}$$

Odejmujemy drugie równanie od pierwszego, otrzymując równanie z jedną niewiadomą k:

$$-b = 5k - \frac{k}{3},$$

którego rozwiązaniem jest $k = -\frac{3}{14}b$. Z pierwszego równania dostajemy $l = -5k = \frac{15}{14}b$. Ostatecznie równanie prostej EM ma postać

$$y = -\frac{3b}{14} \cdot x + \frac{15b}{14}.$$

Pierwsza współrzędna punktu P jest oczywiście równa 1. Drugą współrzędną obliczamy podstawiając $x = 1$ do równania prostej BD:

$$y = -\frac{3b}{14} \cdot 1 + \frac{15b}{14} = \frac{12b}{14} \cdot 4 = \frac{6b}{7}.$$

Zatem punkt P ma współrzędne

$$P = \left(1, \frac{6b}{7}\right).$$

Wreszcie dowodzimy, że $BP = 6 \cdot PD$. Mamy tak jak w przypadku drugim:

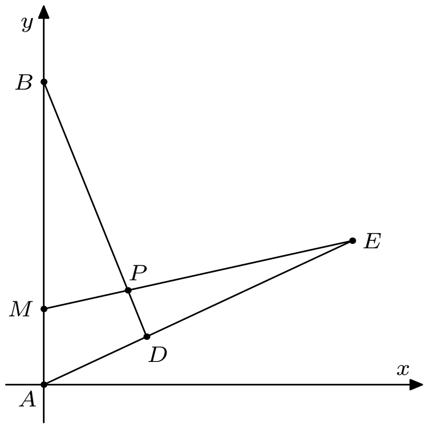
$$PD = b - \frac{6b}{7} = \frac{b}{7},$$
$$BP = \frac{6b}{7} - 0 = \frac{6b}{7} = 6 \cdot PD.$$

To ostatecznie kończy rozwiązanie zadania 19b i tym samym sposób II rozwiązania zadania 19.

Rozwiązanie zadania 19. Sposób III. Zobaczymy teraz inne rozwiązanie za pomocą geometrii analitycznej. Mianowicie wybierzemy układ współrzędnych (osie układu oraz jednostkę na osiach) w taki sposób, by nie było konieczne rozpatrywanie trzech przypadków. Przyjmiemy, że punkt B leży na osi Oy. Punkty A, M, B, D i E będą miały następujące współrzędne:

$$A = (0, 0), \quad M = (0, 1) \quad B = (0, 5), \quad D = (a, b) \quad \text{oraz} \quad E = (3a, 3b)$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a i b. Ponieważ punkt D nie może leżeć na prostej AB, więc $a \neq 0$.



Zauważmy, że nie umieszczamy w tym układzie współrzędnych punktu C; nie będzie on potrzebny w dalszym ciągu. Nasze obliczenia zaczniemy od wyznaczenia równań dwóch prostych: BD i EM.

Niech prosta BD ma równanie postaci $y = kx + l$ dla pewnych k i l. Podstawiając do tego równania współrzędne punktów B i D otrzymamy następujący układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} 5 = k \cdot 0 + l, \\ b = k \cdot a + l. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $l = 5$. Podstawiając tę wartość niewiadomej l do drugiego równania otrzymamy równanie

$$ak + 5 = b,$$

którego rozwiązaniem jest $k = \frac{b-5}{a}$ (zauważmy, że korzystamy tu z założenia, że $a \neq 0$). Ostatecznie równanie prostej BD ma postać:

$$y = \frac{b-5}{a} \cdot x + 5.$$

Niech teraz prosta EM ma równanie postaci $y = kx + l$ dla pewnych k i l. Podstawiając do tego równania współrzędne punktów E i M otrzymamy układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} 3b = k \cdot 3a + l, \\ 1 = k \cdot 0 + l. \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy $l = 1$ i następnie z pierwszego

$$k = \frac{3b-1}{3a}.$$

Równanie prostej EM ma zatem postać

$$y = \frac{3b-1}{3a} \cdot x + 1.$$

Teraz wyznaczamy współrzędne punktu P. W tym celu rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{b-5}{a} \cdot x + 5, \\ y = \frac{3b-1}{3a} \cdot x + 1. \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x:

$$\frac{b-5}{a} \cdot x + 5 = \frac{3b-1}{3a} \cdot x + 1.$$

Przekształcamy je w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} 3(b-5)x + 15a = (3b-1)x + 3a, \\ 3bx - 15x + 15a = 3bx - x + 3a, \\ -15x + 15a = -x + 3a, \\ 14x = 12a, \\ x = \frac{6}{7} \cdot a. \end{gathered}$$

Wreszcie obliczamy niewiadomą y:

$$y = \frac{b-5}{a} \cdot x + 5 = \frac{b-5}{a} \cdot \frac{6a}{7} + 5 = \frac{6b-30}{7} + 5 = \frac{6b+5}{7}.$$

Zatem punkt P ma współrzędne:

$$P = \left(\frac{6a}{7}, \frac{6b+5}{7} \right).$$

Ostatni krok dowodu polega na wykazaniu, że $BP = 6 \cdot DP$. Możemy tego dowieść kilkoma sposobami. Jeden sposób, polegający na obliczeniu długości odcinków BP i PD, widzieliśmy w rozwiązaniu zadania 19b. Teraz zobaczymy trzy inne sposoby.

Sposób 1. Wykażemy, że $BP = \frac{6}{7} \cdot BD$. W tym celu obliczymy kwadraty długości odcinków BD i BP.

$$BD^2 = (a-0)^2 + (b-5)^2 = a^2 + (b-5)^2,$$

$$BP^2 = \left(\frac{6a}{7}\right)^2 + \left(\frac{6b+5}{7} - 5\right)^2 = \frac{36a^2}{49} + \left(\frac{6b-30}{7}\right)^2 = \frac{36a^2}{49} + \left(\frac{6(b-5)}{7}\right)^2 =$$
$$= \frac{36a^2}{49} + \frac{36(b-5)^2}{49} = \frac{36}{49} \cdot \left(a^2 + (b-5)^2\right)^2.$$

Zatem

$$BP^2 = \frac{36}{49} \cdot BD^2,$$

czyli

$$BP = \frac{6}{7} \cdot BD.$$

Oczywiście w podobny sposób można wykazać, że

$$DP = \frac{1}{6} \cdot BD \quad \text{lub} \quad BP = 6 \cdot DP.$$

Sposób 2. Wykażemy, że $\overrightarrow{BP} = 6 \cdot \overrightarrow{PD}$. Mianowicie

$$\overrightarrow{BP} = \left[\frac{6a}{7}, \frac{6b+5}{7} - 5\right] = \left[\frac{6a}{7}, \frac{6b-30}{7}\right] = 6 \cdot \left[\frac{a}{7}, \frac{b-5}{7}\right],$$
$$\overrightarrow{PD} = \left[a - \frac{6a}{7}, b - \frac{6b+5}{7}\right] = \left[\frac{a}{7}, \frac{b-5}{7}\right].$$

Zatem rzeczywiście $\overrightarrow{BP} = 6 \cdot \overrightarrow{PD}$.

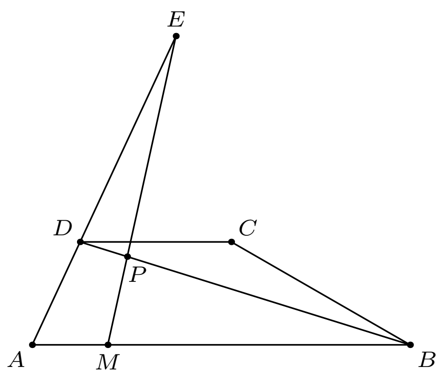
Sposób 3. Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów prostokątnych. Mianowicie niech x_B, x_P oraz x_D oznaczają odpowiednio pierwsze współrzędne punktów B, P i D. Wówczas:

$$\frac{BP}{DP} = \frac{x_P - x_B}{x_D - x_P} = \frac{\frac{6}{7} \cdot a - 0}{a - \frac{6}{7} \cdot a} = \frac{\frac{6}{7} \cdot a}{\frac{1}{7} \cdot a} = 6.$$

To kończy dowód.

Zadanie 19 można uogólnić. Oto możliwe jego uogólnienie.

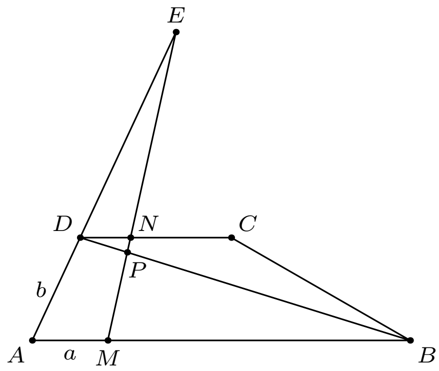
Zadanie 19c. Niech p i q będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Punkt M leży na podstawie AB trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) oraz $MB = p \cdot AM$. Ramię AD przedłużono do punktu E takiego, że $AE = q \cdot AD$ (stąd wynika, że $q > 1$). Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



Udowodnij, że

$$BP = p \cdot \frac{q}{q-1} \cdot PD.$$

Rozwiązanie. Sposób I. Niech N będzie punktem przecięcia odcinka EM z prostą CD. Oznaczmy następnie $a = AM$ oraz $b = AD$.



Wówczas

$$BM = pa, \quad AE = qb \quad \text{oraz} \quad DE = (q-1)b.$$

Następnie zauważmy, że trójkąty EAM i EDN są podobne (jest to pierwsza z opisanych wyżej sytuacji). Mamy więc równość

$$\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AE} = \frac{(q-1)b}{qb} = \frac{q-1}{q}.$$

Stąd dostajemy

$$DN = \frac{q-1}{q} \cdot AM = \frac{q-1}{q}a.$$

Następnie zauważamy, że trójkąty PMB i PND są podobne (jest to druga z opisanych wyżej sytuacji). Mamy zatem równość

$$\frac{BP}{DP} = \frac{BM}{DN} = \frac{pa}{\frac{q-1}{q}a} = p \cdot \frac{q}{q-1}.$$

Stąd wynika, że

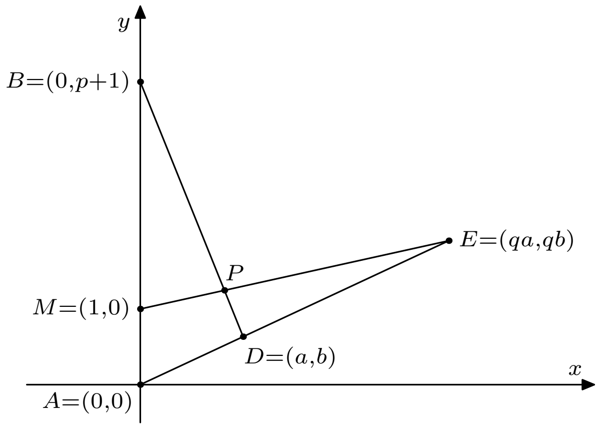
$$BP = p \cdot \frac{q}{q-1} \cdot DP,$$

co kończy dowód.

Rozwiązanie. Sposób II. Zobaczymy rozwiązanie za pomocą geometrii analitycznej. Wybieramy układ współrzędnych (osie układu oraz jednostkę na osiach) tak jak w rozwiązaniu zadania 19b. Zatem punkt A będzie początkiem układu współrzędnych oraz punkt B leży na osi Oy. Punkty A, M, B, D i E będą miały następujące współrzędne:

$$A = (0,0), \quad M = (0,1) \quad B = (0,p+1), \quad D = (a,b) \quad \text{oraz} \quad E = (qa,qb)$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a i b. Ponieważ punkt D nie może leżeć na prostej AB, więc $a \neq 0$.



Zauważmy, że tak jak poprzednio nie umieszczamy w tym układzie współrzędnych punktu C. Nasze obliczenia zaczniemy od wyznaczenia równań dwóch prostych: BD i EM.

Niech prosta BD ma równanie postaci $y = kx + l$ dla pewnych k i l. Podstawiając do tego równania współrzędne punktów B i D otrzymamy następujący układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} p + 1 = k \cdot 0 + l, \\ \quad\;\; b = k \cdot a + l. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $l = p + 1$. Podstawiając tę wartość niewiadomej l do drugiego równania otrzymamy równanie

$$ak + p + 1 = b,$$

którego rozwiązaniem jest $k = \frac{b-p-1}{a}$ (zauważmy, że korzystamy tu z założenia, że $a \neq 0$). Ostatecznie równanie prostej BD ma postać:

$$y = \frac{b - p - 1}{a} \cdot x + p + 1.$$

Niech teraz prosta EM ma równanie postaci $y = kx + l$ dla pewnych k i l. Podstawiając do tego równania współrzędne punktów E i M otrzymamy układ równań z niewiadomymi k i l:

$$\begin{cases} qb = k \cdot qa + l, \\ \;\; 1 = k \cdot 0 + l. \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy $l = 1$ i następnie z pierwszego

$$k = \frac{qb - 1}{qa}.$$

Równanie prostej EM ma zatem postać

$$y = \frac{qb - 1}{qa} \cdot x + 1.$$

Teraz wyznaczymy pierwszą współrzędną punktu P. W tym celu z układu równań

$$\begin{cases} y = \dfrac{b-p-1}{a} \cdot x + p + 1 \\ y = \dfrac{qb-1}{qa} \cdot x + 1 \end{cases}$$

tworzymy równanie z jedną niewiadomą x:

$$\frac{b-p-1}{a} \cdot x + p + 1 = \frac{qb-1}{qa} \cdot x + 1.$$

Przekształcamy je w sposób równoważny:

$$\frac{b-p-1}{a} \cdot x + p = \frac{qb-1}{qa} \cdot x,$$
$$q(b-p-1)x + pqa = (qb-1)x,$$
$$qbx - pqx - qx + pqa = qbx - x,$$
$$-pqx - qx + pqa = -x,$$
$$(pq+q-1)x = pqa,$$
$$x = \frac{pq}{pq+q-1} \cdot a.$$

Zauważmy, że skorzystaliśmy tu z założenia $q > 1$. Mianowicie wówczas

$$pq + q - 1 > q - 1 > 0.$$

Ostatni krok dowodu polega na wykazaniu, że $BP = 6 \cdot DP$. Skorzystamy z ostatniego sposobu pokazanego w rozwiązaniu zadania 19b. Niech x_B, x_P oraz x_D oznaczają odpowiednio pierwsze współrzędne punktów B, P i D. Wówczas:

$$\frac{BP}{DP} = \frac{x_P - x_B}{x_D - x_P} = \frac{x_P - 0}{a - x_P} = \frac{\frac{pqa}{pq+q-1}}{a - \frac{pqa}{pq+q-1}} = \frac{\frac{pq}{pq+q-1}}{1 - \frac{pq}{pq+q-1}} = \frac{pq}{pq+q-1-pq} = p \cdot \frac{q}{q-1}.$$

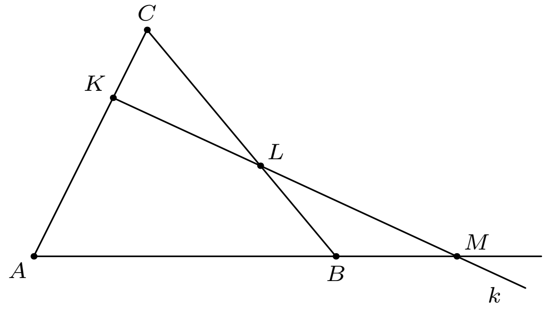
Zatem

$$BP = p \cdot \frac{q}{q-1} \cdot DP,$$

co kończy dowód.

Zadanie 19 jest szczególnym przypadkiem następującego **twierdzenia Menelaosa**.

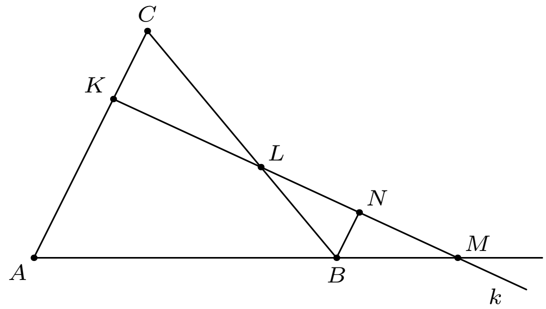
Twierdzenie 2. (Menelaosa) Załóżmy, że prosta k przecina boki AC i BC oraz przedłużenie boku AB trójkąta ABC odpowiednio w punktach K, L i M (zobacz rysunek).



Wówczas

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1.$$

Dowód. Niech N będzie takim punktem prostej k, że $AC \parallel BN$.



Z twierdzenia 1 wynika, że trójkąty AMK i BMN są podobne oraz że trójkąty CKL i BNL są podobne. Mamy zatem:

$$\frac{BN}{AK} = \frac{BM}{AM} \quad \text{oraz} \quad \frac{BN}{CK} = \frac{BL}{CL}.$$

Z obu powyższych równości wyznaczamy BN:

$$BN = \frac{MB}{AM} \cdot AK \quad \text{oraz} \quad BN = \frac{BL}{LC} \cdot CK.$$

Zatem

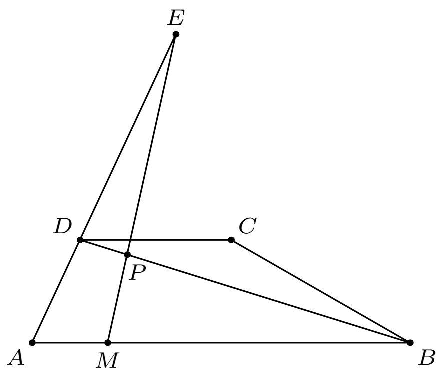
$$\frac{MB}{AM} \cdot AK = \frac{BL}{LC} \cdot CK,$$

czyli

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1.$$

To kończy dowód twierdzenia.

Zauważmy teraz, że rozwiązanie zadania 19c było dowodem twierdzenia Menalaosa w całej ogólności. Popatrzmy bowiem jeszcze raz na rysunek do tego zadania:



Trójkąt ABD został przecięty prostą ME. Przecina ona boki AB i BD odpowiednio w punktach M i P oraz przecina przedłużenie boku AD w punkcie E. Mamy ponadto

$$\frac{AE}{ED} = \frac{q}{q-1} \quad \text{oraz} \quad \frac{BM}{MA} = p.$$

W zadaniu 19c udowodniliśmy, że

$$\frac{BP}{PD} = p \cdot \frac{q}{q-1} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{BM}{MA}.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{AE}{ED} \cdot \frac{DP}{PB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1.$$

To jest dokładnie teza twierdzenia Menelaosa (przy zmienionych oznaczeniach).

Na zakończenie sformułujmy twierdzenie odwrotne do twierdzenia Menelaosa.

Twierdzenie 3. Załóżmy, że punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AC i BC trójkąta ABC, punkt M leży na przedłużeniu boku AB tego trójkąta oraz prawdziwa jest równość

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1.$$

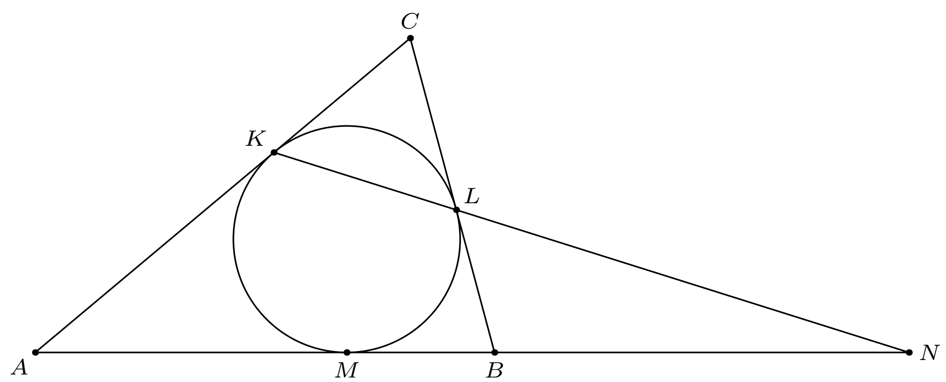
Wówczas punkty K, L i M są współliniowe.

Dowód tego twierdzenia będzie dobrym ćwiczeniem dla Czytelnika. Warto jeszcze zauważyć, że twierdzenie 3 jest często stosowane do dowodzenia współliniowości punktów.

Dodatek.

W tym dodatku zobaczymy dwa przykłady zastosowania twierdzenia Menalaosa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa.

Twierdzenie 4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC, BC i AB odpowiednio w punktach K, L i M. Proste AB i KL przecinają się w punkcie N (zobacz rysunek).



Wówczas punkty M i N dzielą odcinek AB (odpowiednio wewnętrznie i zewnętrznie) w tym samym stosunku, tzn.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}.$$

Dowód. Z twierdzenia Menelaosa wynika, że

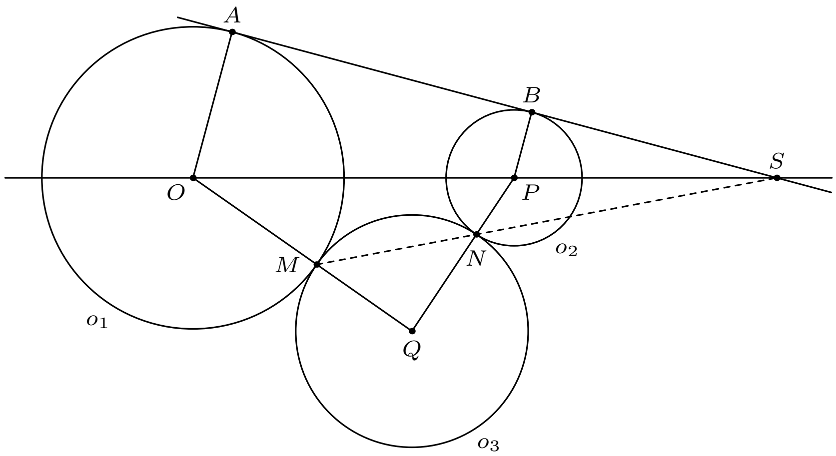
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1.$$

Ponieważ $AK = AM$, $BL = BM$ oraz $CK = CL$, więc

$$\frac{AN}{NB} = \frac{CL}{BL} \cdot \frac{AK}{CK} = \frac{CL}{BM} \cdot \frac{AM}{CK} = \frac{CL}{CK} \cdot \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{MB},$$

co kończy dowód.

Twierdzenie 5. Dane są dwa okręgi o_1 i o_2 o środkach O i P. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest do nich styczna odpowiednio w punktach A i B oraz przecina prostą OP w punkcie S. Okrąg o_3 o środku w punkcie Q jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach M i N (zobacz rysunek).



Wówczas punkty M, N i S są współliniowe.

Dowód. Promienie OA i PB okręgów o_1 i o_2 są prostopadłe do wspólnej stycznej, a więc są równoległe. Z twierdzenia 1 wynika, że trójkąty SOA i SPB są podobne. W szczególności

$$\frac{OS}{SP} = \frac{OA}{PB}.$$

Następnie zauważmy, że $OM = OA$, $PN = PB$ oraz $QM = QN$. Teraz skorzystamy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menalaosa dla trójkąta OPQ i trzech punktów: punktu M na boku OQ, punktu N na boku PQ i punktu S na przedłużeniu boku OP. Mamy wówczas

$$\frac{OS}{SP} \cdot \frac{PN}{NQ} \cdot \frac{QM}{MO} = \frac{OA}{PB} \cdot \frac{PB}{QN} \cdot \frac{QM}{OA} = \frac{QM}{QN} = 1,$$

co dowodzi, że punkty M, N i S są współliniowe.