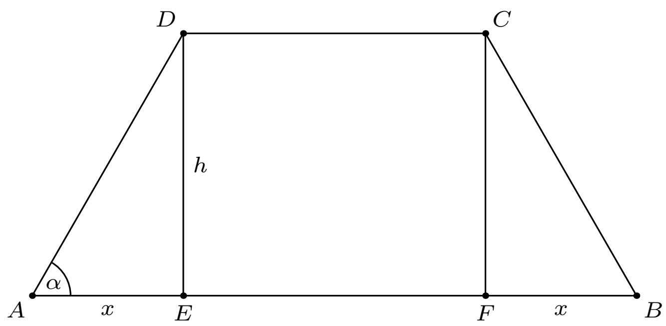
Próbna matura rozszerzona (jesień 2014 r.)

Zadanie 18 — kilka innych rozwiązań

Wojciech Guzicki

Zadanie 18. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Rozwiązanie. Sposób I. Rozważamy trapez równoramienny $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD oraz ramiona AD i BC mają długość 4. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB. Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = BF = x$. Ponadto $EF = CD = 4$. Niech wreszcie $\alpha = \measuredangle BAD$. Oczywiście $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Pole trapezu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = \frac{(2x+4)+4}{2} \cdot h = (x+4) \cdot h =$$
$$= (4 + 4\cos\alpha) \cdot 4\sin\alpha = 16(1+\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Rozważmy następującą funkcję zmiennej rzeczywistej x:

$$f(x) = (1+\cos x)\sin x$$

określoną dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wówczas

$$f'(x) = -\sin^2 x + (1+\cos x)\cos x = -(1-\cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x =$$
$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

Oczywiście w rozważanym przedziale mamy $\cos x + 1 > 0$. Zatem $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos x = \frac{1}{2}$ czyli gdy $x = \frac{\pi}{3}$. Nietrudno także stwierdzić, że w przedziale $(0, \frac{\pi}{3}\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ jest malejąca. teraz już łatwo obliczamy długość podstawy AB, dla której pole trapezu jest największe:

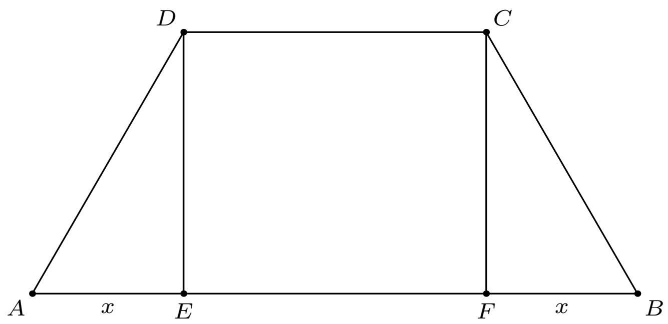
$$AB = 4 + 2x = 4 + 8\cos\frac{\pi}{3} = 1 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA · IBE entuzjaści edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

To pole jest wtedy równe

$$\frac{8+4}{2}\cdot h = 6\cdot 4\sin\frac{\pi}{3} = 12\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie. Sposób II. Rozważamy trapez równoramienny $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD oraz ramiona AD i BC mają długość 4. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB. Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = BF = x$. Oczywiście $x \in (0, 4)$. Ponadto $EF = CD = 4$.



Pole trapezu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}\cdot DE = \frac{(2x+4)+4}{2}\cdot\sqrt{4^2-x^2} = (x+4)\cdot\sqrt{(4-x)(4+x)} =$$
$$= \sqrt{(x+4)^3(4-x)}.$$

Rozważamy następujące liczby rzeczywiste (nietrudno zauważyć, że są one dodatnie dla x z przedziału $(0, 4)$):

$$a_1 = a_2 = a_3 = x+4 \quad \text{oraz} \quad a_4 = 12-3x.$$

Wówczas pole trapezu jest równe

$$P = \sqrt{\frac{a_1a_2a_3a_4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{a_1a_2a_3a_4}.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla czterech liczb dodatnich dostajemy nierówność:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \le \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{3\cdot(x+4)+(12-3x)}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Zatem

$$\sqrt{a_1a_2a_3a_4} \le 6^2 = 36,$$

czyli

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} \le \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}.$$

Równość zachodzi dla x takiego, że $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, czyli dla $x = 2$. Można też sprawdzić bezpośrednio, że dla $x = 2$ mamy

$$P_{ABCD} = (2+4) \cdot \sqrt{4^2 - 2^2} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}.$$

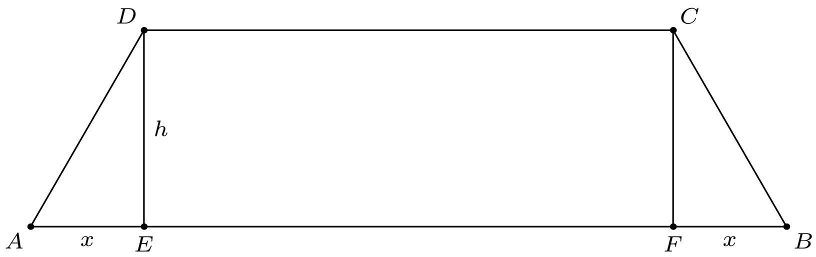
Zatem największe pole ma trapez $ABCD$, w którym $AB = 8$ i to pole jest równe $P_{ABCD} = 12\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Sposób III. Traktujemy trapez jako połowę sześciokąta, powstałego przez doklejenie do naszego trapezu jego odbicia symetrycznego względem prostej AB. Otrzymany sześciokąt ma obwód równy 24. Z twierdzenia izoperymetrycznego Zenodora wynika, że spośród sześciokątów o obwodzie 24 największe pole ma sześciokąt foremny o boku 4. Zatem największe pole ma trapez będący połową sześciokąta foremnego, a więc taki, w którym $AB = 8$. To kończy dowód.

Popatrzmy teraz na modyfikację zadania 18.

Zadanie 18a. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma długość 7 dm i każde z ramion ma długość 3 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Rozwiązanie. Sposób I. Rozważamy trapez $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD ma długość 7 oraz ramiona AD i BC mają długość 3. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB. Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = EF = x$. Ponadto $EF = CD = 7$. Oczywiście $x \in (0, 3)$.



Pole trapezu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = \frac{(2x+7)+7}{2} \cdot h = (x+7) \cdot h =$$
$$= (x+7) \cdot \sqrt{3^2 - x^2} = (x+7)\sqrt{(3+x)(3-x)} = \sqrt{(x+7)^2(x+3)(3-x)}.$$

Rozważmy następującą funkcję zmiennej rzeczywistej x:

$$f(x) = (x+7)^2(x+3)(3-x) = -x^4 - 14x^3 - 40x^2 + 126x + 441$$

określoną dla $x \in (0, 3)$. Wówczas

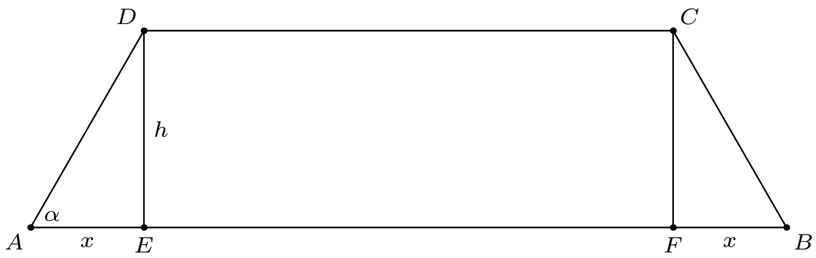
$$f'(x) = -4x^3 - 42x^2 - 80x + 126 = -2(x-1)(x+7)(2x+9).$$

Zauważmy teraz, że jeśli $x \in (0, 1)$, to $f'(x) < 0$ oraz jeśli $x \in (1, 3)$, to $f'(x) > 0$. Stąd wynika, że w przedziale $(0, 1\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle 1, 3)$ funkcja f jest malejąca. Zatem w przedziale $(0, 3)$ funkcja f przyjmuje największą wartość w punkcie $x = 1$; inaczej mówiąc, jeśli $x \in (0, 3)$, to $f(x) \leq f(1)$. Korzystamy teraz z następującej własności pierwiastków: jeśli $0 \leq a \leq b$, to $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Z tej własności wynika, że dla dowolnej liczby $x \in (0, 3)$ prawdziwa jest nierówność

$$P_{ABCD} = \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f(1)} = \sqrt{8^2 \cdot 4 \cdot 2} = 16\sqrt{2}.$$

Ponadto, jeśli $x = 1$, to $P_{ABCD} = 16\sqrt{2}$. To znaczy, że największe pole ma trapez $ABCD$, w którym $AB = 9$ i to największe pole jest równe $P_{ABCD} = 16\sqrt{2}$.

Rozwiązanie. Sposób II. Rozważamy trapez $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD ma długość 7 oraz ramiona AD i BC mają długość 3. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB. Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = EF = x$. Ponadto $EF = CD = 7$. Niech wreszcie $\alpha = \measuredangle BAD$. Oczywiście $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Pole trapezu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = \frac{(2x+7)+7}{2} \cdot h = (x+7) \cdot h =$$
$$= (7 + 3\cos\alpha) \cdot 3\sin\alpha = 3(7 + 3\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Rozważmy następującą funkcję zmiennej rzeczywistej x:

$$f(x) = (7 + 3\cos x)\sin x$$

określoną dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wówczas

$$f'(x) = -3\sin^2 x + (7 + 3\cos x)\cos x = -3(1 - \cos^2 x) + 7\cos x + 3\cos^2 x =$$
$$= 6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = (3\cos x - 1)(2\cos x + 3).$$

Oczywiście w rozważanym przedziale mamy $2\cos x + 3 > 0$. Zatem $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos x = \frac{1}{3}$. Niech x_0 oznacza liczbę z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$, dla której

$\cos x_0 = \frac{1}{3}$. Nietrudno wtedy stwierdzić, że w przedziale $(0, x_0\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle x_0, \frac{\pi}{2})$ jest malejąca. Teraz już łatwo obliczamy długość podstawy AB, dla której pole trapezu jest największe:

$$AB = 7 + 2x = 7 + 6\cos x_0 = 7 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 9.$$

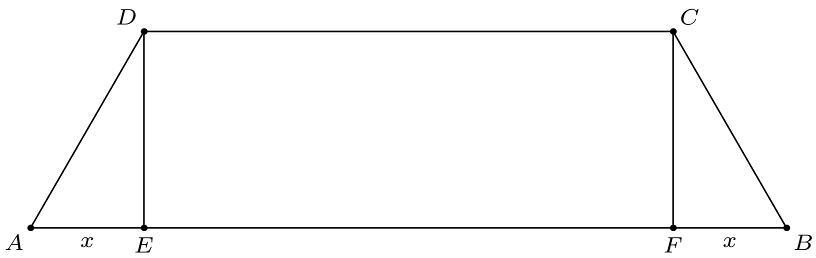
Wreszcie obliczamy pole. Zauważmy najpierw, że

$$\sin^2 x_0 = 1 - \cos^2 x_0 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Stąd $\sin x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, skąd wynika, że $h = 3\sin x_0 = 2\sqrt{2}$. Zatem

$$P_{ABCD} = \frac{9+7}{2} \cdot h = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie. Sposób III. Rozważamy trapez równoramienny $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD ma długość 7, a ramiona AD i BC mają długość 3. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB. Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = EF = x$. Oczywiście $x \in (0, 3)$. Ponadto $EF = CD = 7$.



Tak jak w sposobie I obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P = (x+7)\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{(x+7)^2(x+3)(3-x)}.$$

W tym sposobie rozwiązania chcemy zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną, podobnie jak to miało miejsce w sposobie II rozwiązania zadania 18. Jednak tym razem rozwiązanie wymaga nowego pomysłu. Popatrzmy bowiem, co się stanie, gdy przeniesiemy dosłownie pomysł z rozwiązania zadania 18. Wybierzmy następujące cztery liczby rzeczywiste:

$$a_1 = a_2 = x + 7, \quad a_3 = x + 3 \quad \text{oraz} \quad a_4 = 9 - 3x.$$

Oczywiście dla x z przedziału $(0, 3)$ te liczby są dodatnie. Wówczas pole trapezu jest równe

$$P = \sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA · IBE entuzjaści edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla czterech liczb dodatnich dostajemy nierówność:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{2\cdot(x+7)+(x+3)+(9-3x)}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}.$$

Tak jak poprzednio:

$$\sqrt{a_1a_2a_3a_4} \leq \frac{169}{4},$$

czyli

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{a_1a_2a_3a_4} \leq \frac{169}{4\sqrt{3}} = \frac{169\sqrt{3}}{12} \approx 24{,}39.$$

Okazuje się jednak, że otrzymaliśmy tylko ograniczenie górne na pole trapezu. Mianowicie w nierówności między średnimi tym razem nie może mieć miejsca równość. Jest tak dlatego, że dla żadnego x nie zachodzi równość

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4,$$

czyli

$$x+7 = x+3 = 9-3x.$$

Zadanie wymaga więc innego pomysłu. Wybieramy mianowicie następujące liczby rzeczywiste:

$$a_1 = a_2 = x+7, \quad a_3 = 2x+6 \quad \text{oraz} \quad a_4 = 12-4x.$$

Wówczas

$$P = \sqrt{\frac{a_1a_2a_3a_4}{8}}.$$

Z nierówności między średnimi dostajemy

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{2\cdot(x+7)+(2x+6)+(12-4x)}{4} = \frac{32}{4} = 8.$$

Zatem

$$\sqrt{a_1a_2a_3a_4} \leq 8^2 = 64,$$

czyli

$$P = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{a_1a_2a_3a_4} \leq \frac{64}{\sqrt{8}} = 8\sqrt{8} = 16\sqrt{2} \approx 22{,}63.$$

Równość tym razem ma miejsce dla takiego x, dla którego $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, czyli dla $x = 1$. Rzeczywiście możemy sprawdzić, że dla $x = 1$ mamy

$$P_{ABCD} = (1+7)\cdot\sqrt{3^2-1^2} = 8\sqrt{8} = 16\sqrt{2}.$$

Tak więc największe pole ma trapez $ABCD$, w którym $AB = 9$ i to pole jest równe $16\sqrt{2}$.

Uwaga. Powstaje naturalne pytanie, w jaki sposób zostały znalezione liczby a_1, a_2, a_3 i a_4 w tym rozwiązaniu zadania 18a. W tej uwadze spróbuję wyjaśnić tę kwestię. Przyjrzyjmy się jeszcze raz rozwiązaniu zadania 18. Chcieliśmy w nim znaleźć największą wartość wyrażenia

$$P(x) = \sqrt{(x+4)^3(4-x)}.$$

W tym celu wybraliśmy cztery liczby a_1, a_2, a_3 i a_4 tak, by iloczyn pod pierwiastkiem w wyrażeniu $P(x)$ różnił się co najwyżej stałą od iloczynu $a_1a_2a_3a_4$ występującym pod pierwiastkiem we wzorze na średnią geometryczną. To był pierwszy warunek. Aby go spełnić, wystarczyło przyjąć

$$a_1 = a_2 = a_3 = x + 4 \quad \text{oraz} \quad a_4 = 4 - x.$$

Wtedy jednak niewiadoma x wystąpiłaby także we wzorze na średnią arytmetyczną:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{2x + 16}{4}.$$

Chcemy jednak, by średnia arytmetyczna liczb a_1, a_2, a_3 i a_4 pozwalała obliczyć poszukiwaną największą wartość wyrażenia $P(x)$; w szczególności, by nie zależała od x. Zatem zmieniliśmy nieco liczbę a_4:

$$a_4 = 3 \cdot (4 - x) = 12 - 3x.$$

Teraz mamy

$$P(x) = \sqrt{\frac{a_1a_2a_3a_4}{3}} \quad \text{oraz} \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{3(x+4) + (12 - 3x)}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Drugie wymaganie zostało spełnione. Jest jednak jeszcze trzecie wymaganie. Chcemy, by w nierówności między średnimi mogła mieć miejsce równość. Pamiętamy, że równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są równe, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

To znaczy, że chcemy, by dla pewnej wartości zmiennej x miała miejsce równość

$$x + 4 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 12 - 3x.$$

W zadaniu 18 ta równość była osiągana dla $x = 2$. Wówczas bowiem mieliśmy:

$$x + 4 = 2 + 4 = 6 \quad \text{oraz} \quad 12 - 3x = 12 - 3 \cdot 2 = 12 - 6 = 6.$$

Jak widzieliśmy wyżej, w zadaniu 18a nie można było tak łatwo dobrać liczb a_1, a_2, a_3 i a_4. Przypomnijmy, że chcemy znaleźć największą wartość wyrażenia

$$P(x) = \sqrt{(x+7)^2(x+3)(3-x)}.$$

Przyjmijmy zatem:

$$a_1 = a_2 = p(x+7), \quad a_3 = q(x+3) \quad \text{oraz} \quad a_4 = r(3-x)$$

dla odpowiednio dobranych liczb rzeczywistych p, q i r. Wówczas

$$a_1a_2a_3a_4 = p^2qr \cdot (x+7)^2(x+3)(3-x),$$

a więc iloczyn $a_1a_2a_3a_4$ różni się tylko stałą od iloczynu znajdującego się pod pierwiastkiem w wyrażeniu $P(x)$. Pierwsze wymaganie jest zatem spełnione. Drugie wymaganie polegało na tym, by we wzorze na średnią arytmetyczną nie występowała zmienna x. Popatrzmy zatem na tę średnią arytmetyczną:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{2p(x+7)+q(x+3)+r(3-x)}{4} = \frac{(2p+q-r)x+14p+3q+3r}{4}.$$

Drugie wymaganie zostanie spełnione, gdy przyjmiemy $r = 2p+q$. Zróbmy więc tak. Mamy zatem

$$a_1 = a_2 = p(x+7), \quad a_3 = q(x+3) \quad \text{oraz} \quad a_4 = (2p+q)(3-x).$$

Musimy jeszcze spełnić wymaganie trzecie. Chcemy, by dla pewnej wartości x miała miejsce równość

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4,$$

czyli

$$p(x+7) = q(x+3) = (2p+q)(3-x).$$

Rozwiążmy zatem równanie $p(x+7) = q(x+3)$:

$$\begin{aligned}
p(x+7) &= q(x+3),\\
px+7p &= qx+3q,\\
px-qx &= 3q-7p,\\
(p-q)x &= 3q-7p,\\
x &= \frac{3q-7p}{p-q}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że musimy tak dobrać liczby p i q, by $p \neq q$. Gdyby bowiem $p = q$ (oraz liczby p i q były różne od zera), to dla żadnego x nie otrzymalibyśmy równości

$$a_1 = p(x+7) = q(x+3) = a+3.$$

Mogliśmy zatem podzielić obie strony równania przez $p-q$. Teraz rozwiążmy równanie $p(x+7) = (2p+q)(3-x)$.

$$\begin{aligned}
p(x+7) &= (2p+q)(3-x),\\
px+7p &= 6p-2px+3q-qx,\\
3px+qx &= 3q-p,\\
(3p+q)x &= 3q-p,\\
x &= \frac{3q-p}{3p+q}.
\end{aligned}$$

Będziemy musieli tak dobrać p i q, by liczby a_1, a_2, a_3 i a_4 były dodatnie. Będziemy zatem szukać dodatnich liczb p i q. Zatem będziemy mieli $3p + q \neq 0$. Rozwiązaliśmy dwa równania. Ale liczba x w obu równaniach musi być taka sama. To daje następujący warunek, który muszą spełniać liczby p i q:

$$\frac{3q - 7p}{p - q} = \frac{3q - p}{3p + q}.$$

Przekształćmy to równanie w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}
(3q - 7p)(3p + q) = (3q - p)(p - q),\\
9pq + 3q^2 - 21p^2 - 7pq = 3pq - 3q^2 - p^2 + pq,\\
6q^2 - 2pq - 20p^2 = 0,\\
3q^2 - pq - 10p^2 = 0,\\
(3q + 5p)(q - 2p) = 0.
\end{gathered}$$

Ponieważ szukamy p i q dodatnich, więc $3q + 5p \neq 0$. Zatem $q - 2p = 0$. Przyjmijmy więc

$$p = 1 \quad \text{oraz} \quad q = 2.$$

Wówczas $r = 2p + q = 4$ i otrzymamy następujące liczby a_1, a_2, a_3 i a_4:

$$a_1 = a_2 = x + 7, \quad a_3 = 2(x + 3) = 2x + 6 \quad \text{oraz} \quad a_4 = 4(3 - x) = 12 - 4x.$$

To są dokładnie te liczby, które wzięliśmy w rozwiązaniu zadania 18a.

Zauważmy także, że w zadaniu 18a nie da się zastosować twierdzenia izoperymetrycznego Zenodora.

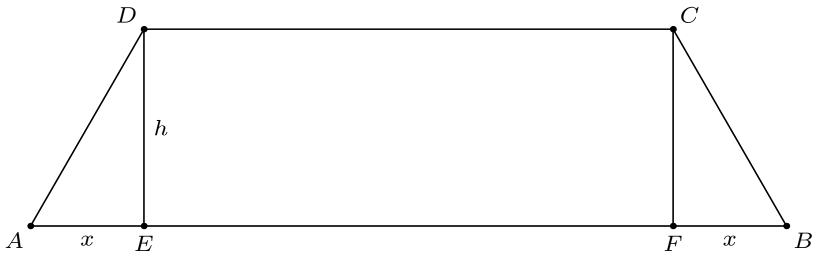
Rozwiążemy teraz zadanie 18a w postaci ogólnej.

Zadanie 18b. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma długość a i każde z ramion ma długość b (przy czym oczywiście $a > 0$ i $b > 0$). Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Zobaczymy tym razem dwa sposoby rozwiązania tego zadania (rozwiązanie trygonometryczne jest dobrym ćwiczeniem dla Czytelnika). Zastanowimy się także nad tym, dla jakich liczb całkowitych a i b zadanie będzie miało rozwiązanie, w którym dłuższa podstawa będzie miała długość wyrażającą się liczbą wymierną. Zobaczymy 22 zestawy takich danych.

Rozwiązanie. Sposób I. Rozważamy trapez $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD ma długość a oraz ramiona AD i BC mają długość b. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB.

Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = EF = x$. Ponadto $EF = CD = a$. Oczywiście $x \in (0, b)$.



Pole trapezu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = \frac{(2x + a) + a}{2} \cdot h = (x + a) \cdot h =$$
$$= (x + a) \cdot \sqrt{b^2 - x^2} = (x + a)\sqrt{(b + x)(b - x)} = \sqrt{(x + a)^2(x + b)(b - x)}.$$

Rozważmy następującą funkcję zmiennej rzeczywistej x:

$$f(x) = (x + a)^2(x + b)(b - x) = -x^4 - 2ax^3 - (a^2 - b^2)x^2 + 2ab^2x + a^2b^2$$

określoną dla $x \in (0, b)$. Wówczas

$$f'(x) = -4x^3 - 6ax^2 - 2(a^2 - b^2)x + 2ab^2 = -2(x + a)(2x^2 + ax - b^2).$$

Interesujące nas miejsce zerowe pochodnej jest dodatnim pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $2x^2 + ax - b^2$. Znajdźmy zatem ten pierwiastek. Obliczamy wyróżnik trójmianu

$$\Delta = a^2 + 8b^2.$$

Otrzymujemy pierwiastek dodatni:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2} - a}{4}.$$

Zauważmy też, że drugi pierwiastek

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{4} = -\frac{\sqrt{a^2 + 8b^2} + a}{4}$$

tego trójmianu jest ujemny. Można też zauważyć, że znaleziony pierwiastek x_1 leży wewnątrz przedziału $(0, b)$. Oczywiście

$$\sqrt{a^2 + 8b^2} > \sqrt{a^2} = a,$$

więc $x_1 > 0$. Dowodzimy teraz, że $x_1 < b$. W tym celu przekształcamy w sposób równoważny nierówność

$$\begin{gathered}\frac{\sqrt{a^2+8b^2}-a}{4} < b,\\ \sqrt{a^2+8b^2}-a < 4b,\\ \sqrt{a^2+8b^2} < a+4b,\\ a^2+8b^2 < (a+4b)^2,\\ a^2+8b^2 < a^2+8ab+14b^2,\\ 0 < 8ab+8b^2.\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co dowodzi, że $x_1 < b$. Popatrzmy teraz na rozkład pochodnej na czynniki:

$$f'(x) = -2(x+a)(x-x_1)(x-x_2).$$

Oczywiście, jeśli $x \in (0, x_1)$, to $f'(x) < 0$ oraz jeśli $x \in (x_1, b)$, to $f'(x) > 0$. Stąd wynika, że w przedziale $(0, x_1\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle x_1, b)$ funkcja f jest malejąca. Zatem w przedziale $(0, b)$ funkcja f przyjmuje największą wartość w punkcie $x = x_1$; inaczej mówiąc, jeśli $x \in (0, b)$, to $f(x) \le f(x_1)$. Korzystamy teraz ponownie z następującej własności pierwiastków: jeśli $0 \le x \le y$, to $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$. Z tej własności wynika, że dla dowolnej liczby $x \in (0, b)$ prawdziwa jest nierówność

$$P_{ABCD} = \sqrt{f(x)} \le \sqrt{f(x_1)}.$$

Ponadto, jeśli $x = x_1$, to $P_{ABCD} = \sqrt{f(x_1)}$. To znaczy, że największe pole ma trapez $ABCD$, w którym $AB = 2x_1 + a$ i to największe pole jest równe:

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= (x_1+a)\sqrt{b^2-x_1^2} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{a^2+8b^2}-a}{4}+a\right)\cdot\sqrt{b^2-\frac{a^2+8b^2-2a\sqrt{a^2+8b^2}+a^2}{16}} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2+8b^2}+3a}{4}\cdot\sqrt{\frac{16b^2-2a^2-8b^2+2a\sqrt{a^2+8b^2}}{16}} = \\ &= \frac{1}{16}\cdot\left(\sqrt{a^2+8b^2}+3a\right)\cdot\sqrt{8b^2+2a\sqrt{a^2+8b^2}-2a^2}. \end{aligned}$$

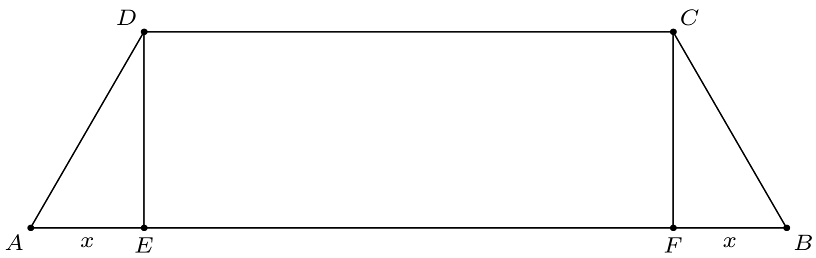
Przyjmijmy nowe oznaczenie:

$$c = \sqrt{a^2+8b^2}.$$

Wówczas

$$x_1 = \frac{c-a}{4} \quad \text{oraz} \quad P_{ABCD} = \frac{1}{16}\cdot(3a+c)\cdot\sqrt{8b^2+2ac-2a^2}.$$

Rozwiązanie. Sposób II. Rozważamy trapez równoramienny $ABCD$, w którym krótsza podstawa CD ma długość a, a ramiona AD i BC mają długość b. Naszym celem jest znalezienie takiej długości dłuższej podstawy AB, dla której pole trapezu $ABCD$ jest największe. Niech punkty E i F będą odpowiednio rzutami wierzchołków D i C na podstawę AB. Oczywiście odcinki AE i FB mają tę samą długość. Przyjmijmy $AE = EF = x$. Oczywiście $x \in (0, b)$. Ponadto $EF = CD = a$.



Tak jak w sposobie I obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P(x) = (x+a)\sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{(x+a)^2(x+b)(b-x)}.$$

W tym sposobie rozwiązania chcemy zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną, podobnie jak to miało miejsce w sposobie III rozwiązania zadania 18a. Tak jak w zadaniu 18a rozwiązanie wymaga pomysłu. Jeśli bowiem $a \neq b$ i wybierzemy liczby rzeczywiste

$$a_1 = a_2 = x + a, \quad a_3 = x + b \quad \text{oraz} \quad a_4 = 3b - 3x,$$

to dla żadnego x nie zachodzi równość

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4,$$

a więc nie otrzymamy równości między średnią geometryczną i arytmetyczną. Będziemy musieli wybrać inne liczby a_1, a_2, a_3 i a_4. Tak jak w uwadze po rozwiązaniu zadania 18a, dobierzemy odpowiednie liczby rzeczywiste p, q i r tak, by dla liczb:

$$a_1 = a_2 = p(x+a), \quad a_3 = q(x+b) \quad \text{oraz} \quad a_4 = r(b-x)$$

nierówność między średnimi dała właściwe oszacowanie pola trapezu. Najpierw zauważamy, że

$$P(x) = \sqrt{(x+a)^2(x+b)(b-x)}$$

oraz

$$a_1a_2a_3a_4 = p^2qr \cdot (x+a)^2(x+b)(b-x),$$

czyli

$$P(x) = \sqrt{\frac{a_1a_2a_3a_4}{p^2qr}}.$$

Tak jak w uwadze po rozwiązaniu zadania 18a, przyjmijmy $r = 2p + q$. Wówczas wzór na średnią arytmetyczną przyjmie postać:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{2p(x+a) + q(x+b) + (2p+q)(b-x)}{4} =$$
$$= \frac{2ap + 2bp + 2bq}{4} = \frac{ap + bp - bq}{2}.$$

Mamy spełnione dwa wymagania sformułowane w uwadze po rozwiązaniu zadania 18a. Iloczyn liczb $a_1a_2a_3a_4$ różni się stała od iloczynu pod pierwiastkiem we wzorze na $P(x)$ oraz średnia arytmetyczna liczb a_1, a_2, a_3 i a_4 nie zależy od x. Teraz zajmiemy się trzecim wymaganiem, by dla pewnego x miała miejsce równość

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

Równość $a_1 = a_3$ daje równanie:

$$p(x+a) = q(x+b).$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$\begin{aligned} px + ap &= qz + bq, \\ px - qx &= bq = ap, \\ (p-q)x &= bq - ap, \\ x &= \frac{bq - ap}{p - q}. \end{aligned}$$

Równość $a_1 = a_4$ daje równanie:

$$p(x+a) = (2p+q)(b-x).$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$\begin{aligned} px + ap &= 2bp - 2px + bq - qx, \\ 3px + qx &= 2bp + bq - ap, \\ (3p+q)x &= 2bp + bq - ap, \\ x &= \frac{2bp + bq - ap}{3p + q}. \end{aligned}$$

Ponieważ oba równania mają dać tę samą wartość niewiadomej x, więc otrzymujemy warunek, który muszą spełniać liczby p i q:

$$\frac{bq - ap}{p - q} = \frac{2bp + bq - ap}{3p + q}.$$

Przekształcamy otrzymane równanie w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}(bq-ap)(3p+q)=(2bp+bq-ap)(p-q),\\ 3bpq+bq^2-3ap^2-apq=2bp^2-2bpq+bpq-bq^2-ap^2+apq,\\ 4bpq+2bq^2-2ap^2-2apq-2bp^2=0,\\ bq^2+(2b-a)pq-(a+b)p^2=0.\end{gathered}$$

Ponieważ, tak jak w uwadze po rozwiązaniu zadania 18a, poszukujemy dodatnich liczb p i q, możemy podzielić obie strony równania przez p^2, wprowadzając nową niewiadomą $t=\frac{q}{p}$:

$$bt^2+(2b-a)t-(a+b)=0.$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu po lewej stronie równania:

$$\Delta=(2b-a)^2+4b(a+b)=4b^2-4ab+a^2+4ab+4b^2=a^2+8b^2.$$

Przyjmijmy, że $\Delta=c^2$, gdzie $c>0$. Zatem $c=\sqrt{\Delta}=\sqrt{a^2+8b^2}$. Wówczas

$$t_1=\frac{-(2b-a)-c}{2b}\quad\text{oraz}\quad t_2=\frac{-(2b-a)+c}{2b}.$$

Oczywiście $t_1<0$. Nietrudno pokazać, że $t_2>0$. Przyjmijmy zatem

$$q=-(2b-a)+c=a+c-2b\quad\text{oraz}\quad p=2b.$$

Mamy zatem

$$a_1=a_2=2b(x+a),\quad a_3=(a+c-2b)(x+b)$$

oraz

$$a_4=(2p+q)(b-x)=(a+2b+c)(b-x).$$

Wówczas mamy nierówność

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\le\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4},$$

czyli

$$\sqrt[4]{4b^2(a+c-2b)(a+2b+c)(x+a)^2(x+b)(b-x)}\le$$
$$\le\frac{4b(x+a)+(a+c-2b)(x+b)+(a+2b+c)(b-x)}{4}.$$

Uprośćmy wyrażenia stojące po obu stronach nierówności:

$$\begin{aligned}4b^2(a+c-2b)(a+2b+c)&=4b^2\cdot\left((a+c)^2-(2b)^2\right)=\\ &=4b^2\cdot(a^2+2ac+c^2-4b^2)=\\ &=4b^2\cdot(a^2+2ac+a^2+8b^2-4b^2)=\\ &=4b^2(2a^2+2ac+4b^2)=8b^2(a^2+ac+2b^2)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&4b(x+a)+(a+c-2b)(x+b)+(a+2b+c)(b-x)=\\
&\qquad =4bx+4ab+ax+ab+cx+bc-2bx-2b^2+ab-ax+2b^2-2bx+bc-cx=\\
&\qquad =6ab+2bc.
\end{aligned}$$

Nierówność między średnimi przybiera zatem postać

$$\sqrt[4]{8b^2(a^2+ac+2b^2)(x+a)^2(x+b)(b-x)}\le\frac{6ab+2bc}{4},$$

czyli

$$\sqrt[4]{8b^2(a^2+ac+2b^2)(x+a)^2(x+b)(b-x)}\le\frac{b(3a+c)}{2}.$$

Podnieśmy obie strony nierówności do kwadratu:

$$\sqrt{8b^2(a^2+ac+2b^2)(x+a)^2(x+b)(b-x)}\le\frac{b^2(3a+c)^2}{4},$$

czyli

$$\sqrt{(x+a)^2(x+b)(b-x)}\le\frac{b(3a+c)^2}{8\sqrt{2a^2+2ac+4b^2}}.$$

Zatem

$$P(x)\le\frac{b(3a+c)^2}{8\sqrt{2a^2+2ac+4b^2}},$$

przy czym równość ma miejsce dla

$$\begin{aligned}
x&=\frac{bq-ap}{p-q}=\frac{b(c-2b-a)-2ab}{2b-(a+c-2b)}=\frac{b(a+c-2b-2a)}{4b-a-c}=\frac{b(c-a-2b)}{4b-a-c}=\\
&=\frac{b(c-a-2b)(4b-a+c)}{(4b-a-c)(4b-a+c)}=\frac{b(4bc-ac+c^2-4ab+a^2-ac-8b^2+2ab-2bc)}{(4b-a)^2-c^2}=\\
&=\frac{b(2bc-2ac+c^2-2ab+a^2-8b^2)}{16b^2-8ab+a^2-(a^2+8b^2)}=\frac{b(2bc-2ac+a^2+8b^2-2ab+a^2-8b^2)}{8b^2-8ab}=\\
&=\frac{b(2bc-2ac+2a^2-2ab)}{8b(b-a)}=\frac{2b(bc-ac+a^2-ab)}{8b(b-a)}=\frac{(b-a)(c+a)}{4(b-a)}=\frac{c-a}{4}.
\end{aligned}$$

Zatem największa wartość wyrażenia $P(x)$ jest równa

$$\frac{b(3a+c)^2}{8\sqrt{2a^2+2ac+4b^2}}.$$

Otrzymaliśmy inną postać tego wyrażenia niż w sposobie 1. Można jednak dość łatwo przekonać się (szczegóły obliczeń pozostawię jako ćwiczenie), że

$$\frac{1}{16}\cdot(3a+c)\cdot\sqrt{8b^2+2ac-2a^2}=\frac{b(3a+c)^2}{8\sqrt{2a^2+2ac+4b^2}}.$$

Tak jak w poprzednim zadaniu interesujące jest to, w jaki sposób można dobrać dane do tego zadania, by otrzymać wyniki wymierne. Chodzi zatem o taki wybór licz a i b, by wyróżnik $\Delta = a^2 + 8b^2$ był kwadratem liczby całkowitej. Równanie

$$a^2 + 8b^2 = c^2$$

ma dość proste rozwiązanie. Nie będę jednak go tu przytaczał. Podam tylko tabelę trójek (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich spełniających to równanie. Podaję tylko takie trójki, w których $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$ oraz $1 \leq a, b \leq 50$. Oto ta tabela:

a	b	c
1	1	3
1	6	17
1	35	99
7	2	9
7	3	11
7	15	43
7	20	57
17	3	19
17	10	33
17	28	81
23	5	27
23	12	41
23	42	121
31	4	33
31	21	67
31	45	131
41	14	57
41	15	59
47	7	51
47	30	97
49	5	51
49	36	113