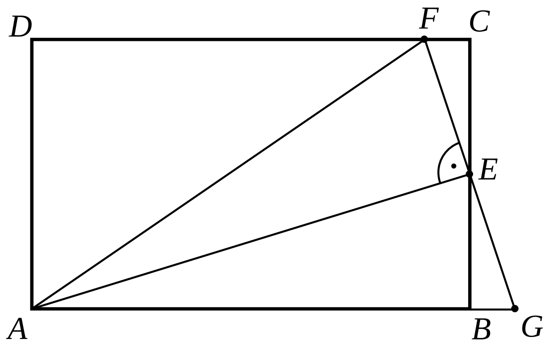
Zadanie 15 – różne sposoby jego rozwiązania

Henryk Dąbrowski, Waldemar Rożek

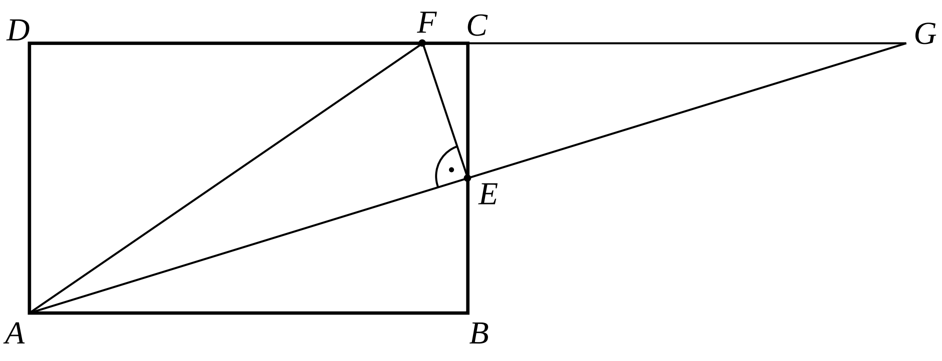
Zadanie 15.
Punkt *E* jest środkiem boku *BC* prostokąta *ABCD*, w którym $AB > BC$. Punkt *F* leży na boku *CD* tego prostokąta oraz $\angle AEF = 90°$. Udowodnij, że $\angle BAE = \angle EAF$.

I sposób rozwiązania
Przedłużamy odcinki *AB* i *EF* do przecięcia w punkcie *G*.



Trójkąty *ECF* i *EBG* są przystające (oba są prostokątne, kąty *CEF* i *BEG* są równe, gdyż są wierzchołkowe oraz $CE = BE$), skąd $EF = EG$. Zatem trójkąty *AEF* i *AEG* są przystające (oba są prostokątne, *AE* jest ich wspólną przyprostokątną i przyprostokątne *EF* i *EG* mają tę samą długość). Zatem $\angle EAF = \angle EAB$, co kończy dowód.

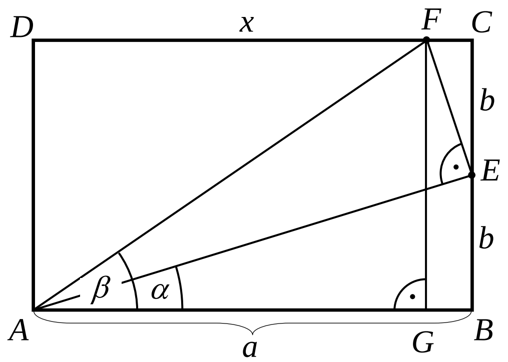
II sposób rozwiązania
Przedłużamy odcinki *AE* i *DC* do przecięcia w punkcie *G*.



Trójkąty *ABE* i *GCE* są przystające (oba są prostokątne, kąty *CEG* i *BEA* są równe, gdyż są wierzchołkowe oraz $CE = BE$), skąd $AE = GE$ oraz $\angle EGC = \angle EAB$. Prosta *EF* jest więc symetralną odcinka *AG*. Zatem $AF = FG$. Trójkąt *AGF* jest więc równoramienny, czyli $\angle EAF = \angle EGF = \angle EAB$. To kończy dowód.

III sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąt ABE jest prostokątny, więc $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$, kąt AEF jest prosty, więc $\sphericalangle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Zatem trójkąty ABE i ECF są podobne, skąd

$$\frac{FC}{EC} = \frac{BE}{AB}, \text{ czyli } \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a}.$$

Stąd $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABE i ADF otrzymujemy

$$AE = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oraz } AF = \sqrt{x^2 + (2b)^2}.$$

Zatem

$$AF = \sqrt{x^2 + 4b^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 + 4b^2} = \sqrt{\frac{\left(a^2 - b^2\right)^2 + 4a^2b^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{a^2}} = \sqrt{\frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{a^2}} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

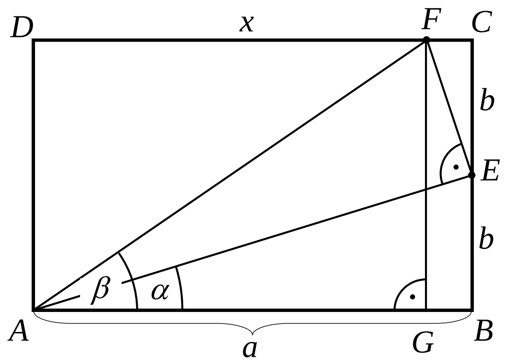
Stąd otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ oraz } \cos\beta = \frac{AG}{AF} = \frac{x}{AF} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Następnie $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} - 1 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \cos\beta$, czyli $2\alpha = \beta$, co należało udowodnić.

IV sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąt ABE jest prostokątny, więc $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$, kąt AEF jest prosty, więc $\sphericalangle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Zatem trójkąty ABE i ECF są podobne, skąd

$$\frac{FC}{EC} = \frac{BE}{AB}, \text{ czyli } \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a}.$$

Stąd $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$.

Z trójkątów ABE i AGF otrzymujemy

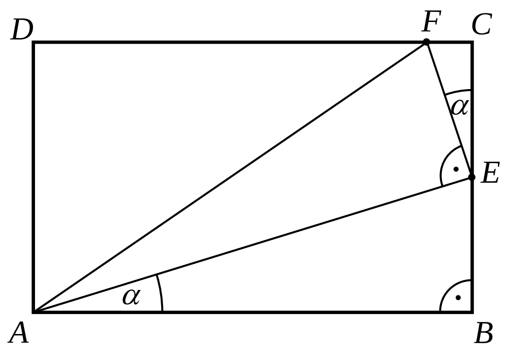
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} \text{ oraz } \mathrm{tg}\,\beta = \frac{2b}{x} = \frac{2b}{\frac{a^2-b^2}{a}} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Zauważmy, że $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \dfrac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \dfrac{2ab}{a^2-b^2} = \mathrm{tg}\,\beta$, czyli $2\alpha = \beta$.

To należało udowodnić.

V sposób rozwiązania

Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAE$.



Trójkąt ABE jest prostokątny, więc $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$, kąt AEF jest prosty, więc

$$\sphericalangle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha.$$

Zatem trójkąty ABE i ECF są podobne, skąd

$$\frac{AB}{EC} = \frac{AE}{EF},$$

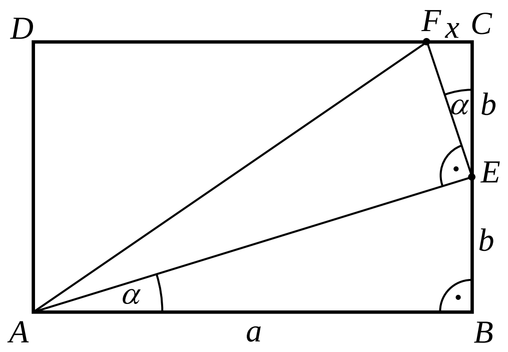
ale $EC = BE$, więc

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AE}{EF}.$$

To oznacza, że stosunki długości przyprostokątnych w trójkątach *ABE* i *AEF* są równe, co z kolei dowodzi, że trójkąty *ABE* i *AEF* są podobne. Stąd otrzymujemy równość kątów $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$. To należało udowodnić.

VI sposób rozwiązania

Ten sposób jest w zasadzie niewielką modyfikacją poprzedniego sposobu.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt *ABE* jest prostokątny, więc $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$, kąt *AEF* jest prosty, więc

$$\sphericalangle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha.$$

Zatem trójkąt *ABE* jest podobny do trójkąta *ECF* w skali $k = \frac{a}{b}$. Stąd wynika, że

$$FC = k \cdot BE = \frac{b}{a} \cdot b = \frac{b^2}{a}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *ABE* i *ECF* otrzymujemy

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oraz } EF = \sqrt{EC^2 + CF^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

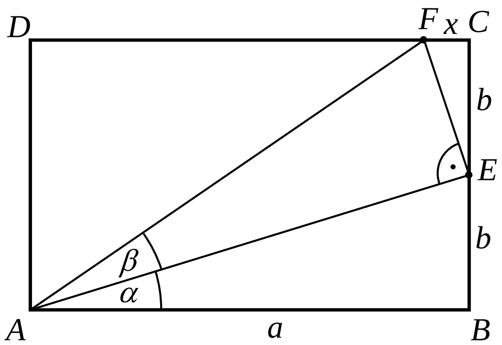
Obliczmy stosunek długości przyprostokątnej *AE* do długości przyprostokątnej *EF* w trójkącie *AEF*

$$\frac{AE}{FE} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\frac{a^2b^2+b^4}{a^2}}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\frac{a^2b^2+b^4}{a^2}}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\frac{b^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2}}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{b}.$$

Otrzymany stosunek jest równy stosunkowi długości przyprostokątnej *AB* do długości przyprostokątnej *BE* w trójkącie *ABE*, co oznacza, że te dwa trójkąty są podobne. Stąd otrzymujemy równość kątów $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$, co właśnie należało udowodnić.

VII sposób rozwiązania

Niech $AB = a$, $BE = CE = b$, $FC = x$, $\sphericalangle BAE = \alpha$, $\sphericalangle EAF = \beta$, jak na rysunku.



Korzystając cztery razy z twierdzenia Pitagorasa kolejno dla trójkątów *ABE*, *CEF*, *AFD* i *AEF* otrzymujemy

$$AE=\sqrt{a^2+b^2},\ EF=\sqrt{x^2+b^2},\ AF=\sqrt{4b^2+(a-x)^2}\ \text{ i }\ AF=\sqrt{AE^2+EF^2}.$$

Z dwóch ostatnich równości otrzymujemy kolejno:

$$4b^2+(a-x)^2=x^2+b^2+a^2+b^2,$$

$$2b^2+a^2-2ax+x^2=x^2+a^2,$$

$$2ax=2b^2,$$

$$x=\frac{b^2}{a}.$$

W trójkącie prostokątnym *ABE* mamy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

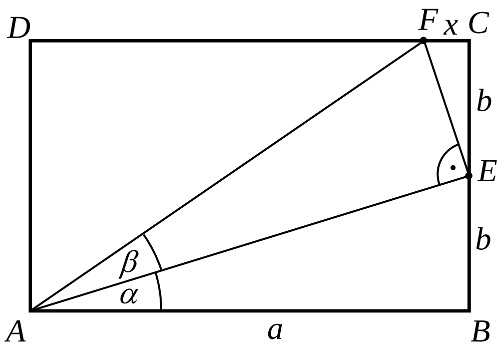
W trójkącie *AEF* mamy natomiast

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\sqrt{b^2+\frac{b^4}{a^2}}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\sqrt{\frac{b^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2\left(a^2+b^2\right)}}=\frac{b}{a}.$$

Zatem skoro $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$ i kąty są ostre, to $\alpha=\beta$, czyli $\angle BAE=\angle EAF$. To kończy dowód.

VIII sposób rozwiązania

Niech $AB=a$, $BE=CE=b$, $FC=x$, $\angle BAE=\alpha$, $\angle EAF=\beta$, jak na rysunku.



Trójkąt *ABE* jest prostokątny, więc $\angle AEB=90^\circ-\alpha$, kąt *AEF* jest prosty, więc

$$\angle CEF=180^\circ-(90^\circ-\alpha)-90^\circ=\alpha.$$

W trójkącie *CEF* mamy

$$\cos\alpha = \frac{b}{EF}, \text{ skąd } EF = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

W trójkącie *ABE* mamy

$$\sin\alpha = \frac{b}{AE}, \text{ skąd } AE = \frac{b}{\sin\alpha}.$$

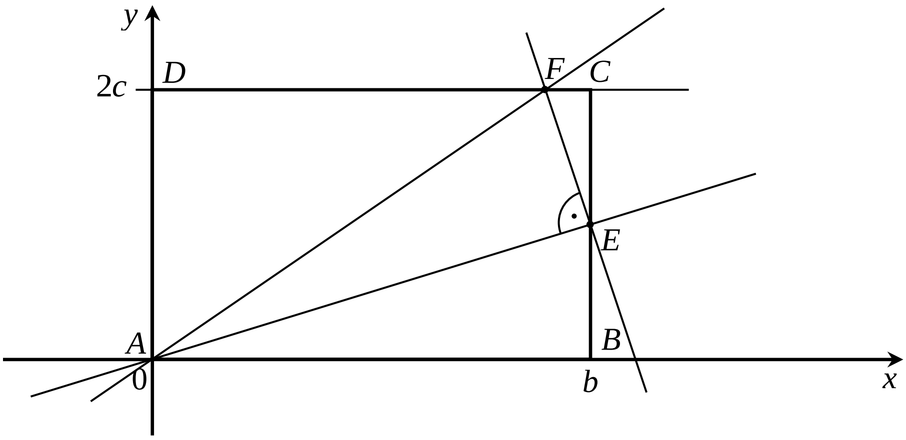
W trójkącie *AEF* mamy

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{EF}{AE} = \frac{\frac{b}{\cos\alpha}}{\frac{b}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha .$$

Zatem skoro $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ i kąty są ostre, to $\alpha = \beta$, czyli $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$. To kończy dowód.

IX sposób rozwiązania

Umieśćmy prostokąt *ABCD* w układzie współrzędnych jak na rysunku i niech $A = (0,0)$, $B = (b,0)$, $C = (b,2c)$, gdzie $0 < 2c < b$.



Wtedy $E = (b,c)$, prosta *AE* ma równanie postaci $y = \frac{c}{b}x$. Zatem prosta *EF* – prostopadła do prostej *AE* i przechodząca przez punkt *E* ma równanie postaci

$$y = -\frac{b}{c}(x-b)+c .$$

Prosta ta przecina prostą *CD* o równaniu $y = 2c$ w punkcie *F*, którego współrzędne obliczymy rozwiązując układ równań

$$y = -\frac{b}{c}(x-b)+c \ \text{ i } \ y = 2c .$$

Porównując prawe strony tych równań, otrzymujemy

$$-\frac{b}{c}(x-b)+c = 2c ,$$

$$-\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{c} = c ,$$

$$\frac{b}{c}x=\frac{b^2}{c}-c,$$

$$x=\frac{b^2-c^2}{b}.$$

Zatem współrzędne punktu F są równe $F=\left(\frac{b^2-c^2}{b},2c\right)$.

Współczynnik kierunkowy prostej AF jest równy

$$\frac{2c}{\frac{b^2-c^2}{b}}=\frac{2bc}{b^2-c^2}\text{, czyli } \operatorname{tg}\sphericalangle BAF=\frac{2bc}{b^2-c^2}.$$

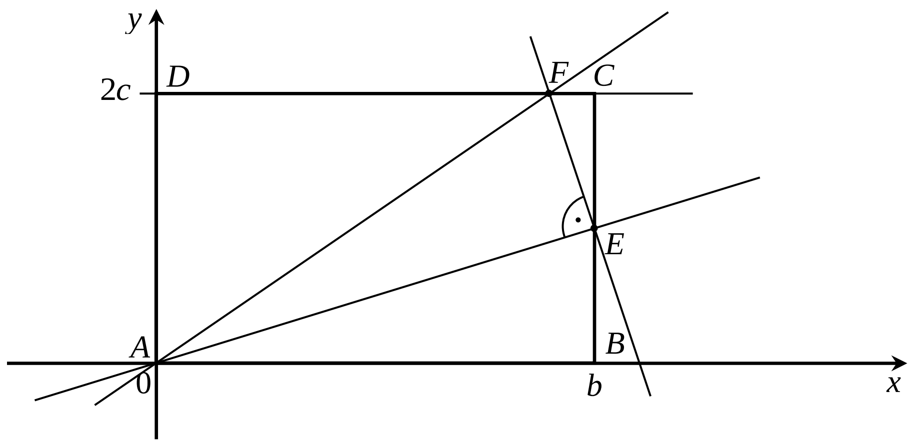
Zauważmy teraz, że $\operatorname{tg}\sphericalangle BAE=\frac{c}{b}$, więc

$$\operatorname{tg}\sphericalangle EAF=\left|\frac{\frac{2bc}{b^2-c^2}-\frac{c}{b}}{1+\frac{2bc}{b^2-c^2}\cdot\frac{c}{b}}\right|=\left|\frac{2b^2c-b^2c+c^3}{b^3-bc^2+2bc^2}\right|=\left|\frac{b^2c+c^3}{b^3+bc^2}\right|=\frac{c\left(b^2+c^2\right)}{b\left(b^2+c^2\right)}=\frac{c}{b}=\operatorname{tg}\sphericalangle EAB.$$ To oznacza,

że $\sphericalangle EAF=\sphericalangle EAB$, co należało udowodnić.

X sposób rozwiązania

Umieśćmy prostokąt $ABCD$ w układzie współrzędnych jak na rysunku i niech $A=(0,0)$, $B=(b,0)$, $C=(b,2c)$, gdzie $0<2c<b$.



Wtedy punkt E ma współrzędne $E=(b,c)$.

Wyznaczmy najpierw współrzędne punktu F. Możemy to zrobić dwoma sposobami. Pierwszy polega na wyznaczeniu równania prostej AE, wyznaczeniu równania prostej EF, a następnie rozwiązaniu układu równań liniowych. Prosta AE równanie postaci $y=\frac{c}{b}x$.

Zatem prosta EF – prostopadła do prostej AE i przechodząca przez punkt E ma równanie postaci $y=-\frac{b}{c}(x-b)+c$. Prosta ta przecina prostą CD o równaniu $y=2c$ w punkcie F.

Współrzędne tego punktu obliczymy rozwiązując układ równań

$$y=-\frac{b}{c}(x-b)+c \text{ i } y=2c.$$

Porównując prawe strony tych równań, otrzymujemy

$$-\frac{b}{c}(x-b)+c=2c,$$

$$-\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{c}=c,$$

$$\frac{b}{c}x=\frac{b^2}{c}-c,$$

$$x=\frac{b^2-c^2}{b}.$$

Zatem współrzędne punktu F są równe $F=\left(\frac{b^2-c^2}{b},2c\right)$.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu iloczynu skalarnego wektorów. Niech $F=(x,2c)$. Wówczas

$$\overrightarrow{AE}=[b,c] \text{ oraz } \overrightarrow{EF}=[x-b,c].$$

Ponieważ $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EF}$, więc $\overrightarrow{AE}\circ\overrightarrow{EF}=0$, czyli $[b,c]\circ[x-b,c]=0$. Zatem

$$b(x-b)+c\cdot c=0,$$

$$bx-b^2+c^2=0,$$

$$x=\frac{b^2-c^2}{b}.$$

Współrzędne punktu F są więc równe $F=\left(\frac{b^2-c^2}{b},2c\right)$.

Teraz skorzystamy ze wzoru na cosinus kąta między wektorami. Mamy

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=[b,0],$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AE}=[b,c],$$

$$\vec{w}=\overrightarrow{AF}=\left[\frac{b^2-c^2}{b},2c\right],$$

Długości tych wektorów są równe

$$|\vec{u}|=\sqrt{b^2+0^2}=b,$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{b^2+c^2},$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{\left(\frac{b^2-c^2}{b}\right)^2+(2c)^2}=\sqrt{\frac{b^2-2b^2c^2+c^4}{b^2}+4c^2}=\sqrt{\frac{b^2+2b^2c^2+c^4}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{b^2+c^2}{b}\right)^2}=\frac{b^2+c^2}{b}.$$

Następnie obliczmy

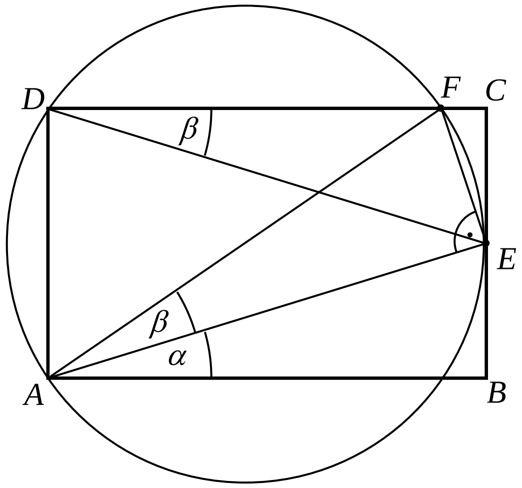
$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{[b,0]\circ[b,c]}{b\cdot\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

oraz

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\circ\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{[b,c]\circ\left[\frac{b^2-c^2}{b},2c\right]}{\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{b}} = \frac{b^2-c^2+2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{b}} = \frac{b^2+c^2}{\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{b}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Skoro $\cos\alpha = \cos\beta$, więc $\alpha = \beta$, czyli $\angle BAE = \angle EAF$. To kończy dowód.

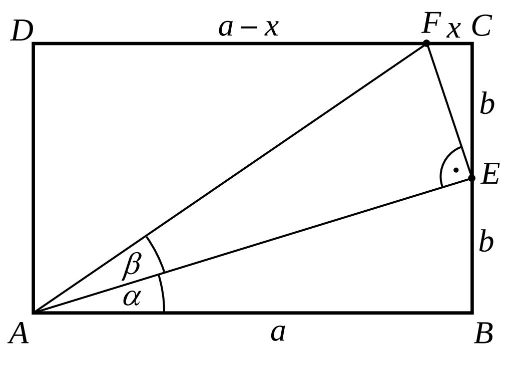
XI sposób rozwiązania



Zauważmy, że punkty *A*, *E*, *F* i *D* leżą na jednym okręgu, gdyż $\angle AEF = \angle ADF = 90°$.
Następnie zauważmy, że $\angle EAF = \angle FDE$ (są to kąty wpisane oparte na łuku *EF*).
Trójkąty *ABE* i *DCE* są przystające, gdyż $AB = DC$, $\angle ABE = \angle DCE = 90°$ oraz $BE = CE$ (cecha BKB). Zatem $\angle BAE = \angle CDE = \angle FDE = \angle EAF$, co kończy dowód.

XII sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąt *ABE* jest prostokątny, więc $\angle AEB = 90° - \alpha$, kąt *AEF* jest prosty, więc $\angle CEF = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Zatem trójkąty *ABE* i *ECF* są podobne, skąd

$$\frac{FC}{EC} = \frac{BE}{AB}, \text{ czyli } \frac{x}{b} = \frac{b}{a}.$$

Stąd $x = \dfrac{b^2}{a}$.

Pole prostokąta *ABCD* jest równe

$$P_{ABCD} = a \cdot 2b = 2ab.$$

Pola trójkątów *ABE*, *ECF* i *AFD* są natomiast równe

$$P_{ABE}=\frac{1}{2}ab,$$

$$P_{ECF}=\frac{1}{2}bx=\frac{1}{2}b\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{b^3}{2a},$$

$$P_{ECF}=\frac{1}{2}\cdot 2b(a-x)=b\cdot\left(a-\frac{b^2}{a}\right)=ab-\frac{b^3}{a}.$$

Pole trójkąta *AEF* jest zatem równe

$$P_{AEF}=P_{ABCD}-P_{ABE}-P_{ECF}-P_{AFD}=2ab-\frac{1}{2}ab-\frac{b^3}{2a}-\left(ab-\frac{b^3}{a}\right)=\frac{1}{2}ab+\frac{b^3}{2a}.$$

Z drugiej strony pole trójkąta *AEF* jest równe

$$P_{AEF}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot\sin\beta.$$

Długości odcinków *AE* i *AF* są równe

$$AE=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$AF=\sqrt{(a-x)^2+(2b)^2}=\sqrt{\left(a-\tfrac{b^2}{a}\right)^2+(2b)^2}=\sqrt{a^2-2b^2+\left(\tfrac{b^2}{a}\right)^2+4b^2}=$$

$$=\sqrt{a^2+2b^2+\left(\tfrac{b^2}{a}\right)^2}=\sqrt{\left(a+\tfrac{b^2}{a}\right)^2}=a+\tfrac{b^2}{a},$$

więc

$$P_{AEF}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\sin\beta.$$

Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}ab+\frac{b^3}{2a},$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\sin\beta=b\left(a+\frac{b^2}{a}\right),$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\beta=b,$$

$$\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Z trójkąta *ABE* mamy natomiast

$$\sin\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Skoro $\sin\alpha=\sin\beta$, kąty α i β są ostre, więc $\alpha=\beta$, czyli $\angle BAE=\angle EAF$.
To kończy dowód.