

Zadanie 28

Uzasadnij, że jeżeli liczba całkowita nie dzieli się przez 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Rozwiązania

I sposób

Niech liczba całkowita nie dzieli się przez 3. Możliwe są wtedy dwa przypadki:

- a) liczba ta przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1,
- b) liczba ta przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Zadanie możemy rozwiązać za pomocą kongruencji.

a) W pierwszym przypadku możemy liczbę całkowitą zapisać w postaci $n = 3k + 1$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Wtedy $3k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, bo różnica liczby $3k + 1$ i liczby 1 dzieli się przez 3. Następnie podnosimy kongruencję do kwadratu i otrzymujemy $(3k + 1)^2 \equiv 1^2 \pmod{3}$, więc n^2 jest w relacji modulo 3 z liczbą 1, a to oznacza, że przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

b) W drugim przypadku otrzymujemy $n = 3k + 2$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Wtedy $3k + 2 \equiv 2 \pmod{3}$, bo różnica liczby $3k + 2$ i liczby 2 dzieli się przez 3. Następnie podnosimy kongruencję do kwadratu i otrzymujemy $(3k + 2)^2 \equiv 2^2 \pmod{3}$. Oczywiście jest, że $4 \equiv 1 \pmod{3}$, gdyż różnica liczb 4 i 1 jest podzielna przez 3. Z przechodniości relacji równoważności otrzymujemy, że $(3k + 2)^2 \equiv 1 \pmod{3}$ więc n^2 jest w relacji modulo 3 z liczbą 1, a to oznacza, że przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

II sposób

Niech n będzie liczbą całkowitą, która nie dzieli się przez 3. Wtedy jedna z liczb $n - 1$ albo $n + 1$ dzieli się przez 3. Wynika to z faktu, że co trzecia liczba całkowita jest wielokrotnością liczby 3, a liczby $n - 1$, n , $n + 1$ są kolejne. Tworzymy iloczyn $(n - 1) \cdot (n + 1) = n^2 - 1$. Ten iloczyn dzieli się przez 3, gdyż jeden z jego czynników jest podzielny przez 3. Jeśli $3 \mid (n^2 - 1)$ to oznacza, że liczba n^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.